

DIE BRAUER-BÄUME DES MONSTERS M IN CHARAKTERISTIK 29

von
Michael Naehrig

DIPLOMARBEIT

in Mathematik

vorgelegt der
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK, INFORMATIK UND NATURWISSENSCHAFTEN
DER RHEINISCH-WESTFÄLISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE AACHEN
im September 2002

Angefertigt am
Lehrstuhl D für Mathematik
bei
Prof. Dr. G. Hiß

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	1
1 Brauer-Bäume	3
1.1 Blöcke mit zyklischer Defektgruppe	3
1.2 Projektive Charaktere	9
1.3 Die Green-Korrespondenz	10
1.4 Die Brauer-Korrespondenz	12
1.5 Die Blöcke von $N_G(D)$	13
1.6 Die unzerlegbaren kN -Moduln	18
1.7 Der Charaktertyp \times/\circ	19
1.8 Die Green-Korrespondenten der einfachen kG -Moduln	21
1.9 Tensorprodukte	23
2 Das Monster in Charakteristik 29	25
2.1 Vorbemerkungen	25
2.2 Der reelle Stamm des Hauptblocks A	26
2.3 Der reelle Stamm des zweiten Blocks B	29
2.4 Die möglichen Brauer-Bäume für B	30
2.5 Die möglichen Brauer-Bäume für A	31
2.6 Der Normalisator der 29-Sylowgruppe	32
2.7 Anwendung der Green-Korrespondenz	36
2.7.1 Die erste Möglichkeit für Γ_B	38
2.7.2 Die zweite Möglichkeit für Γ_B	44
2.7.3 Die dritte Möglichkeit für Γ_B	51
2.8 Bewertung	56
2.9 Tensorprodukte	57
Literaturverzeichnis	61

Vorwort

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Bestimmung der Brauer-Bäume der sporadischen einfachen Gruppe M (Monster) in Charakteristik 29. Sie gliedert sich in zwei Kapitel, in denen zum einen in Kapitel 1 die nötigen theoretischen Grundlagen über Blöcke mit einer zyklischen Defektgruppe sowie Methoden zur Bestimmung von Brauer-Bäumen solcher Blöcke vorgestellt werden, und zum anderen in Kapitel 2 die Ergebnisse im speziellen Fall der Gruppe M erarbeitet werden.

Ausgehend vom Satz von Brauer und Dade wird im ersten Kapitel für eine Primzahl p und einen p -Block von zyklischem Defekt einer endlichen Gruppe G das Konzept des Brauer-Baums und dessen Einbettung in die Ebene eingeführt. Im Fall selbstdualer Blöcke erhalten wir weitere Struktureigenschaften, bevor erste Methoden zur Bestimmung von Brauer-Bäumen mithilfe projektiver Charaktere beschrieben werden. Der größte Teil des Kapitels widmet sich jedoch der Darstellung eines Verfahrens, das Erkenntnisse über die Blöcke von G aus solchen der Blöcke von p -lokalen Untergruppen von G gewinnt. Dies geschieht für den speziellen Fall, dass eine p -Sylowgruppe von G die Ordnung p hat. Die entscheidende Untergruppe von G ist dabei der Normalisator einer p -Sylowgruppe, dessen Blöcke leichter zu beschreiben sind als die von G . Als Bindeglied zwischen diesem Normalisator und der Gruppe G dient die Green-Korrespondenz. In großen Teilen der Argumentation folgen wir Kapitel 4 in [BBB], wobei die grundlegenden Aussagen dieser Theorie aus dem Buch [Fei] stammen.

Im zweiten Kapitel finden die beschriebenen Methoden Anwendung am Beispiel der Gruppe M für $p = 29$. Es gelingt unter Verwendung projektiver Charaktere, die reellen Stämme der Brauer-Bäume zu bestimmen und Einschränkungen an die möglichen Positionen der nichtreellwertigen Knoten zu erhalten. Zur Anwendung der Green-Korrespondenz konstruieren wir den Normalisator einer 29-Sylowgruppe als Permutationsgruppe und berechnen seine Charaktertafel. Mit der Green-Korrespondenz und Tensorprodukten gewöhnlicher irreduzibler Charaktere werden die Möglichkeiten für die Gestalt der Brauer-Bäume von M auf zehn verbleibende begrenzt.

Ich bedanke mich bei Prof. Dr. Gerhard Hiß für den Vorschlag zur Bearbeitung dieses Themas und seine ständige Bereitschaft zur Hilfe. Weiterhin danke ich Klaus Lux für seine ausführlichen Erläuterungen zur Theorie sowie Jürgen Müller, der immer für Diskussionen und die Beantwortung von Fragen zur Verfügung steht.

Ein besonderer Dank gilt meinen Eltern für alles, was sie für mich getan haben, und meinen Schwiegereltern für ihre intensive Unterstützung und Hilfe. Ich danke meiner Natalie von ganzem Herzen für ihre Fürsorge, ihr Verständnis und dafür, dass sie mich immer wieder motivieren konnte.

Ich versichere, dass ich diese Diplomarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Wörtliche oder sinngemäße Wiedergaben aus diesen Quellen sind als solche kenntlich gemacht und durch Zitate belegt.

Aachen, den 24. September 2002

Kapitel 1

Brauer-Bäume

In diesem Kapitel wollen wir theoretische Grundlagen zusammenstellen sowie Methoden zur Bestimmung von Brauer-Bäumen kennenlernen. Dabei wird die Green-Korrespondenz eine wichtige Rolle spielen.

Im ganzen Kapitel seien G eine endliche Gruppe sowie p eine Primzahl und (K, R, k) ein p -modulares Zerfällungssystem für G . Das maximale Ideal in R werde erzeugt von π .

1.1 Blöcke mit zyklischer Defektgruppe

In diesem Abschnitt sei B ein Block von G mit zyklischer Defektgruppe D der Ordnung $|D| = p^d$ mit einer natürlichen Zahl $d \in \mathbb{N}$.

1.1.1 Satz (Der Satz von Brauer und Dade)

Ist $\text{IBr}(B) := \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_e\}$ die Menge der irreduziblen Brauer-Charaktere von B , so gilt

$$e \mid p - 1.$$

Die Anzahl der gewöhnlichen irreduziblen Charaktere ist

$$|\text{Irr}(B)| = e + \frac{p^d - 1}{e}.$$

Ist $\frac{p^d - 1}{e} > 1$, so gibt es eine Partition

$$\text{Irr}(B) = \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_e\} \cup \{\chi_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\},$$

wobei Λ eine Indexmenge mit $|\Lambda| = \frac{p^d - 1}{e}$ ist. Alle χ_λ , $\lambda \in \Lambda$, haben die gleiche Einschränkung auf die p' -Klassen. Sie heißen die *exzeptionellen Charaktere* von B .

Wir definieren

$$\chi_{e+1} := \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda$$

und setzen mit dieser Bezeichnung

$$\text{Irr}_0(B) := \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{e+1}\}.$$

Wir können die Zerlegungsmatrix von B folgendermaßen beschreiben.

Der projektive unzerlegbare Modul, der zum Brauer-Charakter φ_i korrespondiert, bzw. zum einfachen kG -Modul mit Charakter φ_i , sei mit P_i bezeichnet, wobei $i \in \{1, 2, \dots, e\}$ ist. Der Charakter von P_i sei Φ_i . Dann gibt es zu Φ_i zwei Zahlen $i(1)$ und $i(2)$ mit $i(1), i(2) \in \{1, 2, \dots, e+1\}$ und $i(1) \neq i(2)$, so dass

$$\Phi_i = \chi_{i(1)} + \chi_{i(2)}$$

gilt; insbesondere sind die Zerlegungszahlen von B entweder 0 oder 1.

1.1.2 Definition

Nach Satz 1.1.1 sind in der Zerlegungsmatrix von B die Zeilen zu den exceptionellen Charakteren χ_λ , $\lambda \in \Lambda$, alle gleich. Die $(e+1) \times e$ -Matrix, die wir aus der Zerlegungsmatrix erhalten, indem wir für die exceptionellen Charaktere nur eine Zeile schreiben, ist die Inzidenzmatrix eines Baums. Diesen Baum nennen wir den *Brauer-Baum* Γ_B von B .

Wir bezeichnen die Einschränkung eines Charakters χ von G auf die p' -Klassen mit $\hat{\chi}$. Aus der Brauer-Reziprozität erhalten wir die folgende Bemerkung.

1.1.3 Bemerkung

Die Aussage $\Phi_i = \chi_{i(1)} + \chi_{i(2)}$ ist äquivalent zu der folgenden: Der irreduzible Brauer-Charakter φ_i ist Konstituent von $\hat{\chi}_{i(1)}$ und $\hat{\chi}_{i(2)}$ mit Vielfachheit 1 und dies sind die einzigen beiden Charaktere in der Menge $\{\hat{\chi}_j \mid 1 \leq j \leq e+1\}$, in denen φ_i als Konstituent vorkommt.

Von jetzt an wollen wir die Knoten von Γ_B mit den zugehörigen gewöhnlichen irreduziblen Charakteren in $\text{Irr}(B)$ und die Kanten von Γ_B mit den zugehörigen Brauer-Charakteren in $\text{IBr}(B)$ identifizieren. Ist also φ ein Konstituent von $\hat{\chi}$ und $\hat{\chi}'$, so sagen wir, φ ist eine gemeinsame Kante von χ und χ' . Der Knoten, der zu den exceptionellen Charakteren gehört, wird im Brauer-Baum mit einem zusätzlichen Kreis gekennzeichnet. Dieser Knoten heißt der *exceptionelle Knoten* und wir ordnen ihm eine *Vielfachheit* zu. Die Vielfachheit des exceptionellen Knotens sei $\frac{p^d-1}{e}$, sie entspricht also der Anzahl der exceptionellen Charaktere.

Genauso können wir auch die Knoten des Baums mit den Charakteren in der Menge $\text{Irr}_0(B)$ identifizieren und die Kanten mit den Charakteren Φ_i der projektiven unzerlegbaren Moduln. Dann sagen wir, Φ_i ist eine gemeinsame Kante von χ und $\chi' \in \text{Irr}_0(B)$, falls $\Phi_i = \chi + \chi'$ gilt.

Mithilfe des folgenden Satzes können wir den Typ eines Charakters definieren. Dieses Konzept ist sehr nützlich zur Bestimmung von Brauer-Bäumen, da immer nur Charaktere von unterschiedlichem Typ eine gemeinsame Kante haben können. Sei ab jetzt $p > 2$, denn im Fall $p = 2$ gibt es nach Satz 1.1.1 genau einen irreduziblen Brauer-Charakter und genau p^d gewöhnliche irreduzible Charaktere, von denen $p^d - 1$ exceptionelle Charaktere sind. Also hat der Brauer-Baum nur eine Kante, die den exceptionellen Knoten mit einem weiteren nichtexceptionellen Knoten verbindet.

1.1.4 Satz

Sei p^a die höchste p -Potenz, die die Ordnung $|G|$ von G teilt.

- (i) Für alle $\chi \in \text{Irr}_0(B)$ gilt: p^{a-d} teilt $\chi(1)$ und $\frac{\chi(1)}{p^{a-d}}$ wird nicht von p geteilt.
- (ii) Seien $\chi, \chi' \in \text{Irr}_0(B)$ durch eine gemeinsame Kante verbunden, d.h. $\chi + \chi'$ ist projektiv. Weiter seien $\chi(1) = p^{a-d}f_\chi$ und $\chi'(1) = p^{a-d}f_{\chi'}$. Dann gilt:

$$f_\chi + f_{\chi'} \equiv 0 \pmod{p^d}.$$

Beweis:

- (i) Die Aussage folgt aus [Fei, Theorem 2.16, S. 278] für alle gewöhnlichen irreduziblen Charaktere. Da $\frac{p^d-1}{e}$ nicht von p geteilt wird, gilt dies auch für den Charakter χ_{e+1} und damit für alle Charaktere der Menge $\text{Irr}_0(B)$.
- (ii) Die Behauptung entspricht [BBB, Theorem 2.1.11.b), S. 15]. □

1.1.5 Definition

Für einen beliebigen Charakter $\psi \in \text{Irr}_0(B)$ sei f_ψ definiert durch $\psi(1) = p^{a-d}f_\psi$. Die Charaktere in $\text{Irr}_0(B)$ lassen sich in zwei disjunkte Mengen aufteilen. Dabei liegen zwei Charaktere ψ und ψ' in der gleichen Menge, falls für die p' -Anteile ihrer Charaktergrade f_ψ und $f_{\psi'}$ gilt, dass $f_\psi \equiv f_{\psi'} \pmod{p^d}$ ist.

Um zwischen diesen beiden Mengen zu unterscheiden, sagen wir, die Charaktere in der einen Menge seien vom Typ \times , die in der anderen vom Typ \circ . Der triviale Charakter sei stets vom Typ \times .

Aus Satz 1.1.4 (ii) ist ersichtlich, dass nur Charaktere von unterschiedlichem Typ im Brauer-Baum miteinander verbunden sein können. In Abschnitt 1.7 geben wir eine modultheoretische Interpretation des Charaktertyps \times/\circ . Im Fall $d = 1$ haben die Charaktere vom Typ \times auf der Konjugiertenklasse eines Erzeugers x der Defektgruppe D als Wert eine positive ganze Zahl, die vom Typ \circ eine negative ganze Zahl (vgl. Bemerkung 1.7.6). Man kann einem Charakter aus der Menge $\text{Irr}_0(B)$ also eindeutig einen Charaktertyp zuweisen.

Eine Reihe von Brauer-Bäumen lässt sich alleine mit dem Konzept von \times/\circ bestimmen. Der Brauer-Baum ist nämlich ein Stern, genau dann, wenn es genau einen Knoten entweder vom Typ \times oder \circ gibt. Alle anderen Knoten sind dann mit diesem einen verbunden (vgl. dazu [BBB, Lemma 2.1.13., S. 16]).

Wir können mithilfe des folgenden Satzes die Struktur der Reduktionen modulo p gewisser RG -Gitter beschreiben.

1.1.6 Satz

Seien $\chi \in \text{Irr}_0(B)$ ein Knoten von Γ_B und $\varphi \in \text{IBr}(B)$ eine davon ausgehende Kante. Dann gilt:

- (i) Es existiert ein RG -Gitter L mit Charakter χ , so dass $\bar{L} := L/\pi L$, seine Reduktion modulo p , uniserial ist und der irreduzible kG -Modul S mit Charakter φ der Kopf von \bar{L} ist, d.h.

$$\bar{L}/\text{rad}(\bar{L}) \cong S.$$

- (ii) Ist L' ein weiteres RG -Gitter mit Charakter χ , so dass \bar{L}' uniserial ist, so erhalten wir die Kompositionsreihe von \bar{L}' durch eine zyklische Permutation der Kompositionsreihe von \bar{L} .

Beweis: Der Satz entspricht [BBB, Theorem 2.1.18., S. 17]. \square

Der obige Satz beschreibt also eine Reihenfolge innerhalb der von einem festen Knoten χ ausgehenden Kanten. Dabei folgt die Kante φ_2 auf die Kante φ_1 , falls es ein RG -Gitter L mit Charakter χ gibt, dessen Reduktion modulo p uniserial ist, so dass φ_1 und φ_2 in der aufsteigenden Kompositionsreihe von \bar{L} als aufeinander folgende Faktoren vorkommen.

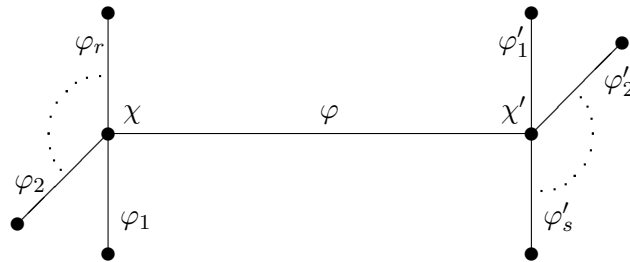
1.1.7 Definition

Den in die Ebene eingebetteten Brauer-Baum $\Gamma_B^{(e)}$ erhalten wir, indem wir um einen jeden Knoten die von ihm ausgehenden Kanten in der oben beschriebenen Reihenfolge im Uhrzeigersinn anordnen.

Wir werden im Folgenden meist die Bezeichnung Γ_B statt $\Gamma_B^{(e)}$ für den in die Ebene eingebetteten Brauer-Baum verwenden, da aus dem Zusammenhang klar ist, was wir meinen. Der eingebettete Brauer-Baum enthält noch mehr Informationen, wie in [Alp, S. 118 ff] beschrieben wird. Wir können nämlich die Struktur der projektiven unzerlegbaren kG -Moduln mithilfe des in die Ebene eingebetteten Brauer-Baums beschreiben. Dies tun wir in der folgenden Bemerkung.

1.1.8 Bemerkung

Sei φ eine Kante des Brauer-Baums Γ_B , die die Knoten χ und χ' verbindet. Die Kanten, die von χ ausgehen, seien im Uhrzeigersinn $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_r$ und die von χ' ausgehenden $\varphi, \varphi'_1, \dots, \varphi'_s$ (ebenfalls im Uhrzeigersinn). Das heißt, wir haben einen Teilbaum der folgenden Form.



Zunächst betrachten wir den Fall, dass keiner der beiden Knoten der exceptionnelle Knoten ist. Sind S der einfache kG -Modul mit Charakter φ und P der projektive unzerlegbare kG -Modul, der zu S korrespondiert, so sind der Sockel $\text{soc}(P)$ von P und der

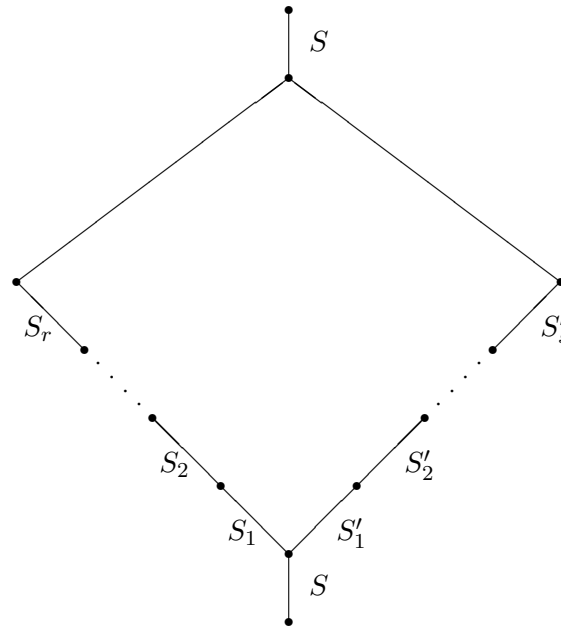


Abbildung 1.1: Der projektive unzerlegbare Modul zu φ

Kopf $P/\text{rad}(P)$ von P beide isomorph zu S . Der Faktor $\text{rad}(P)/\text{soc}(P)$ ist die Summe höchstens zweier uniserieller Moduln, deren Kompositionsfaktoren in aufsteigender Reihenfolge S_1, S_2, \dots, S_r bzw. S'_1, S'_2, \dots, S'_s sind. Dabei sind die S_i bzw. S'_j die einfachen kG -Moduln zu den Charakteren φ_i bzw. φ'_j . Gilt $r = 0$ oder $s = 0$, d.h. χ oder χ' ist ein Blatt des Brauer-Baums, so ist $\text{rad}(P)/\text{soc}(P)$ uniseriell und hat die Kompositionsreihe S'_1, S'_2, \dots, S'_s oder S_1, S_2, \dots, S_r . Der Modul P ist für den Fall $rs \neq 0$ in Abbildung 1.1 dargestellt.

Ist nun χ der exzeptionelle Knoten, so hat der uniserielle Modul im Faktor $\text{rad}(P)/\text{soc}(P)$, der zu χ gehört, als aufsteigende Kompositionsreihe

$$S_1, S_2, \dots, S_r, S, S_1, \dots, S_r, S, S_1, \dots, S_r.$$

Der Modul S kommt in dieser Reihe $\frac{p^d-1}{e} - 1$ mal vor. Im Fall $r = 0$ ergibt sich die Kompositionsreihe S, S, \dots, S .

Beweis: Dies folgt aus [Alp, S. 118 ff und Theorem 1, S. 123]. □

Wir wollen nun den Brauer-Baum von B noch genauer beschreiben. Dazu beschränken wir uns auf selbstduale Blöcke. Für das nächste Lemma und die Definition eines selbstdualen Blocks benötigen wir nicht die Voraussetzung, dass B eine zyklische Defektgruppe hat. Die Primzahl p ist ebenfalls an keine Einschränkungen gebunden.

1.1.9 Lemma

Sei B ein Block von G . Der zu χ komplex konjugierte Charakter sei mit $\bar{\chi}$ bezeichnet. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) Es existiert ein $\chi \in \text{Irr}(B)$, so dass $\bar{\chi} \in \text{Irr}(B)$ ist.
- (ii) Für alle $\chi \in \text{Irr}(B)$ gilt $\bar{\chi} \in \text{Irr}(B)$.
- (iii) Es existiert ein $\varphi \in \text{IBr}(B)$, so dass $\bar{\varphi} \in \text{IBr}(B)$ ist.
- (iv) Für alle $\varphi \in \text{IBr}(B)$ gilt $\bar{\varphi} \in \text{IBr}(B)$.

Beweis: [BBB, Corollary 2.1.16., S. 16]. □

1.1.10 Definition

Ein Block B von G , welcher eine der Eigenschaften aus Lemma 1.1.9 erfüllt, heißt *selbstdual*.

Nun kehren wir zurück zu unseren ursprünglichen Voraussetzungen, d.h. B habe zyklischen Defekt und es gelte $p > 2$.

1.1.11 Satz

Seien B selbstdual und $\chi \in \text{Irr}_0(B)$ ein Knoten von Γ_B , sowie $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ die Kanten, die von χ in dieser Reihenfolge ausgehen. Dann ist die Reihenfolge der Kanten am Knoten $\bar{\chi}$ gegeben durch $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_r, \dots, \bar{\varphi}_2$.

Beweis: [BBB, Theorem 2.1.20.a), S. 18]. □

Die Reihenfolge der Kanten wird also bei komplexer Konjugation genau umgedreht. Betrachten wir nun den Spezialfall von reellwertigen Charakteren in $\text{Irr}_0(B)$.

1.1.12 Lemma

Sei B selbstdual. Dann existiert ein Charakter $\chi \in \text{Irr}_0(B)$ mit $\bar{\chi} = \chi$.

Beweis: [BBB, Theorem 2.1.17., S. 17]. □

In einem selbstdualen Block von zyklischem Defekt gibt es also mindestens einen reellwertigen Charakter in der Menge $\text{Irr}_0(B)$. Es gibt also mindestens einen reellwertigen Knoten. Was können wir über diese speziellen Knoten aussagen?

1.1.13 Satz

Sei B selbstdual. Die reellwertigen Knoten in $\text{Irr}_0(B)$ und die reellwertigen Kanten in $\text{IBr}(B)$ bilden einen zusammenhängenden Teilgraphen S_B von Γ_B . Dieser Teilgraph ist ein offenes Polygon, d.h. eine gerade Linie, und heißt der *reelle Stamm* von Γ_B .

Beweis: [BBB, Theorem 2.1.20.b), S. 18]. □

1.1.14 Bemerkung

Komplexe Konjugation induziert einen Graphen-Automorphismus des eingebetteten Brauer-Baums $\Gamma_B^{(e)}$, welcher eine Spiegelung am reellen Stamm S_B ist.

Beweis: [BBB, Theorem 2.1.20.c), S. 18]. □

Es ist also sinnvoll, sich bei der Bestimmung eines Brauer-Baums zunächst mit dem reellen Stamm zu befassen, da hier ein Knoten höchstens zwei reellwertige Nachbarn haben kann. Außerdem kann man anschließend die Spiegelsymmetrie ausnutzen, um die Positionen von Paaren komplex konjugierter Charaktere auf dem Brauer-Baum herauszufinden.

1.2 Projektive Charaktere

Nachdem wir uns im vorhergehenden Abschnitt mit grundlegenden Eigenschaften von Brauer-Bäumen beschäftigt haben, wollen wir jetzt erste Methoden zu deren Bestimmung darstellen. Wieder sei B ein Block von G mit zyklischer Defektgruppe D der Ordnung $|D| = p^d$, $p \neq 2$. Wir erinnern uns, dass zwei Knoten χ und χ' im Brauer-Baum miteinander verbunden sind, falls die Summe $\chi + \chi'$ projektiv ist. Also liegt es nahe, dass wir uns projektive Charaktere bzw. deren Zerlegung in die irreduziblen Charaktere des Blocks B ansehen. In diesem Abschnitt sei $\theta \in \{K, R, k\}$. Es seien RG -Moduln stets RG -Gitter.

1.2.1 Lemma

Seien M und N θG -Moduln, wobei M projektiv sei, und $H \leq G$ eine Untergruppe von G sowie P ein projektiver θH -Modul. Dann gilt:

- (i) Das Tensorprodukt $M \otimes N$ ist projektiv.
- (ii) Die Moduln M^{2+} und M^{2-} sind projektiv.
- (iii) Der nach G induzierte Modul P^G ist projektiv.

Beweis:

(i) [Fei, Lemma 2.7, S. 83].

(ii) Unter der Voraussetzung, dass $p \neq 2$ ist, beachten wir die Definitionen

$$M^{2+} := \langle m \otimes n + n \otimes m \mid m, n \in M \rangle,$$

$$M^{2-} := \langle m \otimes n - n \otimes m \mid m, n \in M \rangle,$$

so folgt die Behauptung aus (i) mit $M \otimes M = M^{2+} \oplus M^{2-}$.

(iii) [BBB, Lemma 3.1.15., S. 23]. □

Mithilfe dieses Lemmas können wir nun aus der gewöhnlichen Charaktertafel projektive Charaktere erzeugen, indem wir z.B. Tensorprodukte von Defekt-0-Charakteren mit beliebigen anderen Charakteren oder die Symmetrisierungen χ^{2+} und χ^{2-} eines Defekt-0-Charakteren χ berechnen. Die so gewonnenen projektiven Charaktere zerlegen wir in die irreduziblen Konstituenten. Der Anteil im Block B liefert Informationen über die Kanten zwischen denjenigen Knoten, die in diesen Zerlegungen vorkommen.

1.3 Die Green-Korrespondenz

Die Methoden aus dem vorherigen Abschnitt lassen keinen Schluss über die Einbettung des Brauer-Baums in die Ebene zu. Außerdem ist nicht gewährleistet, dass die Betrachtung von projektiven Charakteren die komplette Gestalt des Brauer-Baums liefert. An dieser Stelle ist es notwendig, tiefer gehende darstellungstheoretische Ergebnisse zu verwenden. Unser Ziel ist es, die Struktur der Blöcke von G aus der Untersuchung von p -lokalen Untergruppen von G herzuleiten. Wir wollen uns dazu den Normalisator einer p -Sylowgruppe in G ansehen. Die Green-Korrespondenz ist das bindende Glied zwischen Moduln für G und solchen dieses Normalisators.

Beginnen wir mit den Grundvoraussetzungen. Es sei $\theta \in \{K, R, k\}$. Eine p -Sylowgruppe D von G habe die Ordnung $|D| = p$. Die Blöcke von G , die nicht vom Defekt 0 sind, haben dann Defekt $d = 1$, und deren Defektgruppen sind gerade die p -Sylowgruppen von G . Insbesondere sind die Defektgruppen zyklisch. Es sei

$$N := N_G(D)$$

der Normalisator von D in G . Dann gilt

$$D \cap gDg^{-1} = \{1\} \text{ für alle } g \in G \text{ mit } g \notin N.$$

Also ist D eine TI-Menge (trivial intersection set) für G . Aus diesem Grund erhalten wir die folgende spezielle Form der Green-Korrespondenz. Wir bezeichnen die Menge der nichtprojektiven unzerlegbaren θG -Moduln (bis auf Isomorphie) mit $\text{Ind}_{np}(\theta G)$.

1.3.1 Satz (Green-Korrespondenz)

Es existieren zueinander inverse Bijektionen

$$f : \text{Ind}_{np}(\theta G) \longrightarrow \text{Ind}_{np}(\theta N),$$

$$g : \text{Ind}_{np}(\theta N) \longrightarrow \text{Ind}_{np}(\theta G),$$

die folgendermaßen gegeben sind:

- (i) Für $X \in \text{Ind}_{np}(\theta G)$ ist der auf N eingeschränkte Modul X_N die direkte Summe

$$X_N = f(X) \oplus Z_1,$$

wobei Z_1 ein projektiver θN -Modul ist.

- (ii) Für $Y \in \text{Ind}_{np}(\theta N)$ ist der nach G induzierte Modul Y^G die direkte Summe

$$Y^G = g(Y) \oplus Z_2,$$

wobei Z_2 ein projektiver θG -Modul ist.

$f(X)$ heißt der Green-Korrespondent zu X , $g(Y)$ der Green-Korrespondent zu Y .

Beweis: [BBB, Lemma 4.1.1., S. 27]. □

Wir können nun die Abbildungen f und g auf beliebige Moduln fortsetzen, indem wir Folgendes festlegen (siehe [BBB, Lemma 4.1.4., S. 29]).

- (i) Ist P ein projektiver unzerlegbarer θG -Modul, so sei $f(P) := 0$. Für einen beliebigen θG -Modul X definieren wir

$$f(X) := \bigoplus_{i=1}^n f(X_i), \text{ falls sich } X = \bigoplus_{i=1}^n X_i$$

schreiben lässt als direkte Summe von unzerlegbaren Moduln X_i . Dann enthält $f(X)$ keinen projektiven unzerlegbaren Summanden und es gilt

$$X_N = f(X) \oplus Z_1$$

mit einem projektiven θN -Modul Z_1 .

- (ii) Genauso sei $g(P') := 0$ für jeden projektiven unzerlegbaren θN -Modul P' und wir setzen

$$g(Y) := \bigoplus_{i=1}^n g(Y_i), \text{ wenn } Y = \bigoplus_{i=1}^n Y_i$$

die direkte Summe von unzerlegbaren Moduln Y_i ist. Auch $g(Y)$ enthält keinen projektiven unzerlegbaren Summanden und es gilt

$$Y^G = g(Y) \oplus Z_2$$

mit einem projektiven θG -Modul Z_2 .

Mit dieser Erweiterung formulieren wir das folgende Lemma.

1.3.2 Lemma

Seien X und Y θG -Moduln und X^* der zu X duale Modul. Dann gilt:

- (i) $f(X) \otimes f(Y) = f(X \otimes Y) \oplus P$ mit einem projektiven θN -Modul P .
(ii) $f(X^*) = f(X)^*$.

Ist insbesondere der Modul X selbstdual, so auch sein Green-Korrespondent $f(X)$.

Beweis:

- (i) [BBB, Lemma 4.1.5.a), S. 30].
(ii) [BBB, Lemma 4.1.6., S. 31].

□

1.4 Die Brauer-Korrespondenz

Die Green-Korrespondenz ist eine Korrespondenz zwischen θG -Moduln und θN -Moduln. Es stellt sich nun die Frage, ob dabei Blöcke respektiert werden. Wenn zwei unzerlegbare Moduln im gleichen Block liegen, tun das dann auch ihre Green-Korrespondenten?

Die folgenden Aussagen gelten auch in einer allgemeineren Situation als der von Abschnitt 1.3. Wir können deshalb in diesem Abschnitt zu den globalen Grundvoraussetzungen des Kapitels zurückkehren, so wie sie ganz zu Beginn vor Abschnitt 1.1 angegeben sind.

1.4.1 Satz (Brauers erster Hauptsatz)

Seien D eine p -Untergruppe von G und $H \leq G$ eine Untergruppe von G , für die $N_G(D) \subseteq H$ gilt. Dann existiert eine Bijektion zwischen der Menge aller Blöcke von H mit Defektgruppe D und der Menge aller Blöcke von G mit Defektgruppe D .

Beweis: [Fei, Theorem 9.7, S. 137]. □

1.4.2 Bemerkung

Die Bijektion in Satz 1.4.1 ist gegeben durch die *Brauer-Korrespondenz*. Man vergleiche hierzu [Alp, S. 101] und [Fei, S. 136]. Der Block B von G , der dem Block b von H zugeordnet ist, heißt der *Brauer-Korrespondent* von b . Wir schreiben in diesem Fall $B = b^G$.

1.4.3 Satz

Die Voraussetzungen seien wie in Satz 1.4.1, und es sei D eine Defektgruppe des Hauptblocks von H . Dann ist der Brauer-Korrespondent des Hauptblocks von H der Hauptblock von G .

Beweis: [Alp, Theorem 1, S. 112]. □

Wenden wir die Brauer-Korrespondenz speziell im Fall $H = N_G(D) =: N$ an, so haben wir also eine Bijektion zwischen den Blöcken von G mit Defektgruppe D und den Blöcken von N mit Defektgruppe D . Mit den Voraussetzungen des vorhergehenden Abschnitts über die Green-Korrespondenz stellt sich die Frage, wie der Zusammenhang zwischen der Brauer-Korrespondenz und der Green-Korrespondenz ist.

1.4.4 Lemma

Seien b ein Block von N mit Defektgruppe D und B der Brauer-Korrespondent von b in G . Ist M ein unzerlegbarer nichtprojektiver θG -Modul in B , so liegt der Green-Korrespondent $f(M)$ in b .

Beweis: [Fei, Theorem 7.8, S. 131]. □

Wir erhalten also Informationen über die Blöcke von G lokal aus den korrespondierenden Blöcken von N , wobei ein Block von N die Green-Korrespondenten der Moduln in seinem Brauer-Korrespondenten enthält.

1.5 Die Blöcke von $N_G(D)$

Die Voraussetzungen seien wieder wie in Abschnitt 1.3. Um die Green-Korrespondenz zur Bestimmung der Brauer-Bäume der Blöcke von G anwenden zu können, untersuchen wir die Blöcke des Normalisators N .

Es sei

$$C := C_G(D)$$

der Zentralisator von D in G . Wir beschreiben zunächst die Blöcke in C . Nach dem Satz von Schur-Zassenhaus (vgl. [KSt, Satz 3.3.1., S. 66]) hat D ein Komplement in C . Dieses Komplement bezeichnen wir mit Q . Es gilt also

$$C = D \times Q.$$

Es sei die Menge der gewöhnlichen irreduziblen Charaktere von D mit

$$\text{Irr}(D) = \{\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{p-1}\}$$

bezeichnet. Dabei sei $\tilde{\lambda}_0$ der triviale Charakter. Dann erhalten wir die Menge der gewöhnlichen irreduziblen Charaktere von C als die Menge der Produkte der Charaktere aus $\text{Irr}(D)$ mit den gewöhnlichen irreduziblen Charakteren von Q :

$$\text{Irr}(C) = \{\tilde{\lambda}_i \times \tilde{\psi} \mid 0 \leq i \leq p-1, \tilde{\psi} \in \text{Irr}(Q)\}.$$

Dabei ist ein Charakter $\tilde{\lambda}_i \times \tilde{\psi}$ folgendermaßen definiert:

$$\tilde{\lambda}_i \times \tilde{\psi}(x, y) := \tilde{\lambda}_i(x) \tilde{\psi}(y) \text{ für } x \in D, y \in Q.$$

Wir bezeichnen die Charaktere $\tilde{\lambda}_i \times 1_Q$ mit λ_i und $\tilde{\lambda}_0 \times \tilde{\psi}$ mit ψ . Dann gilt: $\lambda_i \otimes \psi = \tilde{\lambda}_i \times \tilde{\psi}$. Es gilt also:

$$\text{Irr}(C) = \{\lambda_i \otimes \psi \mid 0 \leq i \leq p-1, \psi \in \text{Irr}(Q)\}.$$

Wie sehen nun die Blöcke von C aus?

1.5.1 Satz

Es gibt eine Bijektion zwischen den Blöcken von C und den gewöhnlichen irreduziblen Charakteren von Q .

Sei β ein Block von C . Dann gibt es in β genau einen gewöhnlichen irreduziblen Charakter ψ_0 , der D im Kern hat, d.h. $\psi_0 = \tilde{\lambda}_0 \times \tilde{\psi}_0$. Die übrigen irreduziblen Charaktere von β sind die Tensorprodukte der λ_i mit ψ_0 . Es gilt also

$$\text{Irr}(\beta) = \{\psi_i := \lambda_i \otimes \psi_0 \mid 0 \leq i \leq p-1\}.$$

Der Charakter ψ_0 heißt der kanonische Charakter von β .

Beweis: [BBB, Theorem 4.2.1., S. 35]. □

1.5.2 Bemerkung

Da Q eine p' -Gruppe ist, ist die Einschränkung von ψ_0 auf die p' -Klassen (was nichts anderes ist als $\tilde{\psi}_0$) ein irreduzibler Brauer-Charakter. Alle Charaktere in β schränken gleich auf die p' -Klassen ein. Es gibt also in β genau einen irreduziblen Brauer-Charakter $\hat{\psi}_0$, d.h. genau einen einfachen kC -Modul. Der Brauer-Baum von β hat somit eine Form wie in Abbildung 1.2.

Dabei sind die Knoten wie in Satz 1.1.1 bezeichnet, d.h. $\chi_1 = \psi_0$ und der exzeptionelle Knoten ist $\chi_2 = \sum_{i=1}^{p-1} \psi_i$ mit Vielfachheit $p - 1$. Also ist der projektive unzerlegbare kC -Modul, der zum einzigen irreduziblen Brauer-Charakter gehört, uniseriell und seine Kompositionsreihe hat Länge p .

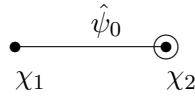


Abbildung 1.2: Der Brauer-Baum von β

Beweis: Dies folgt aus Satz 1.5.1 und Bemerkung 1.1.8. Man vergleiche dazu [BBB, Theorem 4.2.1., S. 35] und [Alp, Theorem 1, S. 128]. \square

Nun kennen wir die Blöcke von C und wollen daraus auf die Blöcke von N schließen. Hierbei nutzen wir aus, dass C ein Normalteiler in N ist. Wir lösen uns für einen Moment von unseren Grundvoraussetzungen, um die für diese Situation notwendigen Definitionen und Aussagen zu formulieren.

1.5.3 Definition

Seien G eine endliche Gruppe, $H \trianglelefteq G$ ein Normalteiler in G , B ein Block von G und b ein Block des Normalteilers H .

- (i) Der Block B überdeckt den Block b , falls ein Charakter $\chi \in \text{Irr}(B)$ existiert, so dass dessen Einschränkung auf H einen Konstituenten $\chi' \in \text{Irr}(b)$ hat.
- (ii) G operiert durch Konjugation auf den Blöcken von H . Die Gruppe

$$T(b) := \{g \in G \mid gb g^{-1} = b\} \leq G$$

heißt die *Trägheitsgruppe* von b in G .

Von dieser Definition ausgehend, erhalten wir einige grundlegende Eigenschaften.

1.5.4 Satz

Die Voraussetzungen seien wie in Definition 1.5.3. Zusätzlich sei $D \trianglelefteq G$ ein p -Normalteiler in G .

- (i) Die Blöcke, die von B überdeckt werden, bilden eine G -Konjugiertenklasse von Blöcken von H .
- (ii) Es gibt einen Block, der b überdeckt.
- (iii) Falls für den Zentralisator $C_G(D)$ von D in G gilt: $C_G(D) \leq H$, so wird b von genau einem eindeutig bestimmten Block von G überdeckt.

Beweis:

- (i) [Fei, Lemma 2.3, S. 196].
- (ii) [Fei, Lemma 4.10(ii), S. 153].
- (iii) [Fei, Lemma 3.10, S. 200]. □

Diese Situation können wir genau so gut auf die Trägheitsgruppe $T(b)$ statt G anwenden. Der Zusammenhang zwischen Blöcken von $T(b)$, die eine gewisse Konjugiertenklasse von Blöcken von H überdecken und solchen von G ist im folgenden Satz zusammengestellt.

1.5.5 Satz

Seien also $H \trianglelefteq G$ ein Normalteiler in G und b ein Block von H . Sei \tilde{B}_0 ein Block von $T(b)$, der b überdeckt.

- (i) Die Brauer-Korrespondenz $\tilde{B} \longrightarrow \tilde{B}^G$ definiert eine Bijektion zwischen den Blöcken von $T(b)$, die b überdecken und den Blöcken von G , die b überdecken.
- (ii) Die Abbildung $\chi \longrightarrow \chi^G$, die $\chi \in \text{Irr}(\tilde{B}_0)$ auf den nach G induzierten Charakter abbildet, definiert eine Bijektion zwischen den gewöhnlichen irreduziblen Charakteren von \tilde{B}_0 und den gewöhnlichen irreduziblen Charakteren von \tilde{B}_0^G .
- (iii) Die Abbildung $\varphi \longrightarrow \varphi^G$, die $\varphi \in \text{IBr}(\tilde{B}_0)$ auf den nach G induzierten Charakter abbildet, definiert eine Bijektion zwischen den irreduziblen Brauer-Charakteren von \tilde{B}_0 und den irreduziblen Brauer-Charakteren von \tilde{B}_0^G .
- (iv) Die Blöcke \tilde{B}_0 und \tilde{B}_0^G haben die gleiche Zerlegungsmatrix und die gleiche Cartan-Matrix.
- (v) Die Blöcke \tilde{B}_0 und \tilde{B}_0^G haben eine gemeinsame Defektgruppe.
- (vi) Der Block b von H ist der eindeutig bestimmte Block, der von \tilde{B}_0 überdeckt wird.

Beweis: [Fei, Theorem 2.5, S. 197]. □

Von nun an betrachten wir wieder unseren Normalisator N und den darin enthaltenen Normalteiler $C = D \times Q$, dessen Blöcke wir ja nach Satz 1.5.1 bereits kennen. Die Gruppe N operiert also auf dem Normalteiler C durch Konjugation, wobei D invariant gelassen wird. Das bedeutet, N operiert auf $C/D \cong Q$ durch Konjugation und damit auch auf der Menge $\text{Irr}(Q)$. Mithilfe der Sätze 1.5.4 und 1.5.5 schließen wir die folgende Bemerkung.

1.5.6 Bemerkung

Es gibt eine Bijektion zwischen den Blöcken von G mit Defektgruppe D und den Bahnen von N auf den gewöhnlichen irreduziblen Charakteren $\text{Irr}(Q)$ von Q .

Beweis: [Alp, Theorem 4, S. 109] bzw. [BBB, Remark 4.2.11., S. 38 ff]. □

Erinnern wir uns an unser Ziel, die Blöcke von N zu beschreiben, um schließlich mithilfe der Green-Korrespondenz Rückschlüsse auf die Blöcke von G ziehen zu können. Dazu sei b ein Block von N und β ein Block von C , der von b überdeckt wird. Nach Satz 1.5.5 reicht es aus, den nach Satz 1.5.4 eindeutig bestimmten Block \tilde{b} der Trägheitsgruppe $T(\beta)$ von β in N zu betrachten, der β überdeckt. Denn die Brauer-Bäume von \tilde{b} und b sind gleich und die Knoten und Kanten von Γ_b sind die induzierten Knoten und Kanten von $\Gamma_{\tilde{b}}$. Also beschäftigen wir uns mit dem Block \tilde{b} .

Man beachte, dass N/C zyklisch ist, da es isomorph zu einer Untergruppe von $\text{Aut}(D)$ ist. Letztere ist eine zyklische Gruppe der Ordnung $p - 1$. Es sei

$$e := |T(\beta) : C|$$

der Index von C in der Trägheitsgruppe von β . Wir werden sehen, dass dieses e gleich der Anzahl der irreduziblen Brauer-Charaktere im Block B von G (vgl. Satz 1.1.1), dem Brauer-Korrespondenten von b , ist.

Wir wählen an dieser Stelle einen gewöhnlichen irreduziblen Charakter

$$\alpha \in \text{Irr}(N)$$

von N , dessen Kern den Zentralisator C enthält und der die Ordnung $p - 1$ hat. Dieser Charakter dient zur Beschreibung der Blöcke von N , und wir verwenden für jeden Block b von N diesen fest gewählten Charakter α .

1.5.7 Satz

Die nichtexzeptionellen gewöhnlichen irreduziblen Charaktere in \tilde{b} sind die Fortsetzungen von ψ_0 aus Satz 1.5.1, von denen es genau e Stück gibt. Ist $\tilde{\zeta}$ eine von diesen, so können wir alle Fortsetzungen beschreiben durch

$$\tilde{\zeta}_i := \tilde{\zeta} \otimes \tilde{\alpha}^i, \quad 0 \leq i < e.$$

Dabei ist $\tilde{\alpha}$ die Einschränkung von α auf $T(\beta)$. Die exzeptionellen Charaktere in \tilde{b} , die mit

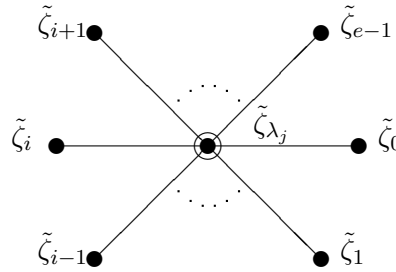
$$\tilde{\zeta}_{\lambda_1}, \dots, \tilde{\zeta}_{\lambda_{\frac{p-1}{e}}}$$

bezeichnet seien, erhalten wir, indem wir einige der exzeptionellen Charaktere des Blocks β aus Bemerkung 1.5.2 von C nach $T(b)$ induzieren. Im Block \tilde{b} liegen also genau e irreduzible Brauer-Charaktere. Diese sind Fortsetzungen des einzigen irreduziblen Brauer-Charakters $\tilde{\psi}_0$ von β .

Der eingebettete Brauer-Baum von \tilde{b} ist also ein Stern mit e Kanten und exzeptionellem Knoten mit Vielfachheit $\frac{p-1}{e}$ im Zentrum. Die Reihenfolge der Blätter ist dabei gegeben durch die Reihenfolge der $\tilde{\zeta}_i$ wie in Abbildung 1.3 dargestellt. Man beachte, dass wir den Charakter α fest gewählt haben.

Beweis: [BBB, Remark 4.2.11., S. 38 ff] und [Alp, Proposition 2, S. 135]. □

Nun können wir leicht mithilfe von Satz 1.5.5 den Block b von N beschreiben. Wir setzen $\zeta_0 := \tilde{\zeta}_0^N$ und $\zeta_{\lambda_j} := \tilde{\zeta}_{\lambda_j}^N$ für $1 \leq j \leq \frac{p-1}{e}$. Die Einschränkung von ζ_0 auf die p' -Klassen sei mit ϕ_0 bezeichnet.

Abbildung 1.3: Der eingebettete Brauer-Baum von \tilde{b} **1.5.8 Satz**

Die gewöhnlichen irreduziblen Charaktere in b sind die induzierten Charaktere von \tilde{b} . Also sind die nichtexzeptionellen Charaktere die Tensorprodukte eines irreduziblen Charakters mit den Potenzen von α :

$$\zeta_i = \zeta_0 \otimes \alpha^i, \quad 0 \leq i \leq e-1.$$

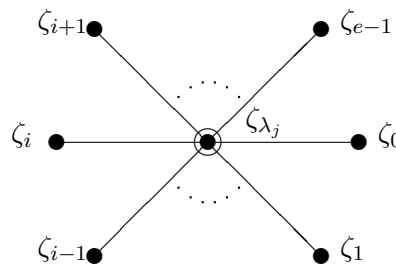
Die exzeptionellen Charaktere sind $\zeta_{\lambda_1}, \dots, \zeta_{\lambda_{\frac{p-1}{e}}}$. Die irreduziblen Brauer-Charaktere sind

$$\phi_i = \phi_0 \otimes \hat{\alpha}^i, \quad 0 \leq i \leq e-1,$$

wobei der Charakter $\hat{\alpha}$ die Einschränkung von α auf die p' -Klassen von N ist.

Der Brauer-Baum von b ist ein Stern mit e Kanten und dem exzeptionellen Knoten mit Vielfachheit $\frac{p-1}{e}$ im Zentrum. Die Einbettung in die Ebene ist in Abbildung 1.4 dargestellt, wobei sich die Reihenfolge der Blätter wieder über die Reihenfolge der Charaktere ζ_i ergibt.

Beweis: [BBB, Remark 4.2.11., S. 38 ff] bzw. [Alp, Theorem 1, S. 135]. \square

Abbildung 1.4: Der eingebettete Brauer-Baum von b

1.6 Die unzerlegbaren kN -Moduln

Wir verwenden die Bezeichnungen aus dem vorhergehenden Abschnitt 1.5. Insbesondere sei also b ein Block von N . Wir kennen nun den Brauer-Baum von b und können mit Bemerkung 1.1.8 auf die projektiven unzerlegbaren kN -Moduln in b schließen.

1.6.1 Lemma

Sei P_i der projektive unzerlegbare kN -Modul in b , der zum einfachen kN -Modul mit Brauer-Charakter ϕ_i , $0 \leq i \leq e - 1$ (wie in Satz 1.5.8), korrespondiert. Dann gilt:

Der Modul P_i ist uniseriell und seine Kompositionsreihe hat die Länge p . Die Faktoren der aufsteigenden Kompositionsreihe sind

$$\phi_i, \phi_{i+1}, \dots, \phi_{i+p-2}, \phi_i.$$

Dabei werden die Indizes modulo e interpretiert.

Beweis: Die Behauptung folgt aus Satz 1.5.8 und Bemerkung 1.1.8 bzw. aus [Fei, Theorem 3.5(i), S. 282]. \square

Dies erlaubt uns, die unzerlegbaren kN -Moduln in b zu beschreiben.

1.6.2 Lemma

Die Anzahl der Isomorphieklassen von unzerlegbaren kN -Moduln in b ist ep . Jeder unzerlegbare kN -Modul in b ist ein Faktormodul eines projektiven unzerlegbaren Moduls und ist uniseriell.

Beweis: [Alp, Corollary 8, S. 142], [Fei, Theorem 3.5(ii), S. 282] und [BBB, Lemma 4.2.14., S. 41]. \square

Aus den beiden Lemmas folgt nun, dass ein beliebiger unzerlegbarer kN -Modul in b eindeutig charakterisiert werden kann durch seinen Sockel und die Länge seiner Kompositionsreihe. Wir führen eine neue Schreibweise für solche Moduln ein.

1.6.3 Definition

Wir bezeichnen die Blöcke von N mit kleinen Buchstaben, also mit a, b, c, \dots, x, y, z . Der Hauptblock von N sei stets mit a bezeichnet. Für einen jeden Block x von N wählen wir einen einfachen kN -Modul, den wir ${}_1x_0$ nennen (Dies entspricht dem Modul zum Brauer-Charakter ϕ_0 in Satz 1.5.8). Im Hauptblock wählen wir den trivialen Modul, der dann ${}_1a_0$ heißt. Ist nun M ein unzerlegbarer kN -Modul in x , dessen Kompositionsreihe die Länge l hat und dessen Sockel der einfache Modul zum Charakter $\phi_j = \phi_0 \otimes \hat{\alpha}^j$ ist, so bezeichnen wir M mit ${}_lx_j$.

1.6.4 Lemma

Mit den Bezeichnungen aus Definition 1.6.3 gilt die folgende Gleichheit:

$${}_lx_j = {}_1x_0 \otimes {}_la_j.$$

Beweis: Das Lemma folgt aus [Fei, Lemma 2.1, S. 341], man vgl. dazu auch [BBB, Remark 4.3.1., S. 43]. Es ist zu beachten, dass wir für jeden Block von N zu dessen Beschreibung den gleichen, vorher fest gewählten Charakter α genommen haben. \square

Wir werden später sehen, wie wir mit bestimmten Tensorprodukten von gewöhnlichen Charakteren von G Aussagen über die Struktur der Brauer-Bäume von G treffen können. Die Green-Korrespondenz stellt dazu mithilfe von Lemma 1.3.2 die Verbindung zu Tensorprodukten von unzerlegbaren kN -Moduln her, was wir weiter unten erarbeiten werden. Also sehen wir uns das Tensorprodukt zweier unzerlegbarer kN -Moduln ${}_l x_j$ und ${}_k y_i$ an. Mit Lemma 1.6.4 gilt dann

$$\begin{aligned} {}_l x_j \otimes {}_k y_i &= ({}_1 x_0 \otimes {}_l a_j) \otimes ({}_1 y_0 \otimes {}_k a_i) \\ &= ({}_1 x_0 \otimes {}_1 y_0) \otimes ({}_l a_j \otimes {}_k a_i). \end{aligned}$$

Das Produkt ${}_1 x_0 \otimes {}_1 y_0$ kann aus der gewöhnlichen Charaktertafel von N/D berechnet werden, da D im Kern von ${}_1 x_0$ und ${}_1 y_0$ liegt. Es bleibt dann nur noch das Produkt ${}_l a_j \otimes {}_k a_i$ zu bestimmen. In unserem Fall reicht es aus, wie wir weiter unten sehen werden, diese Produkte für die Moduln mit Kompositionslänge 1 und $p-1$ zu kennen.

1.6.5 Lemma

Für die Tensorprodukte der unzerlegbaren kN -Moduln im Hauptblock a der Länge 1 und $p-1$ gilt:

$$(i) \quad {}_1 a_i \otimes {}_1 a_j \equiv {}_1 a_{(i+j)}.$$

$$(ii) \quad {}_1 a_i \otimes {}_{(p-1)} a_j \equiv {}_{(p-1)} a_{(i+j)}.$$

$$(iii) \quad {}_{(p-1)} a_i \otimes {}_{(p-1)} a_j \equiv {}_1 a_{(i+j-1)}.$$

Dabei bedeutet '≡' Gleichheit bis auf projektive Moduln.

Beweis: [BBB, Lemma 4.3.2., S. 45]. □

1.7 Der Charaktertyp \times/\circ

Wir wollen in diesem Abschnitt eine modultheoretische Interpretation des Konzepts des Charaktertyps \times/\circ geben, da wir dies für die Anwendung der Green-Korrespondenz benötigen. Es sei $\theta \in \{K, R, k\}$. Die Bezeichnungen seien wie in den vorhergehenden Abschnitten.

1.7.1 Definition

Sei M ein θG -Modul. Es seien P_M die projektive Hülle von M und $\pi_M : P_M \rightarrow M$ der natürliche Epimorphismus von P_M auf M .

Dann bezeichnen wir den Kern von π_M mit $\Omega(M)$ und nennen ihn den *Heller-Modul* von M .

1.7.2 Bemerkung

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Omega : \text{Ind}_{np}(\theta G) &\longrightarrow \text{Ind}_{np}(\theta G) \\ M &\longrightarrow \Omega(M) \end{aligned}$$

ist eine Bijektion der Menge der nichtprojektiven unzerlegbaren θG -Moduln auf sich selbst.

Beweis: Dies folgt im Fall $\theta = k$ aus [Alp, Theorem 5, S. 146], sonst vgl. [BBB, Definition 4.1.8., S. 32]. \square

Für die Knoten von Γ_B , d.h. die Charaktere in $\text{Irr}_0(B)$ haben wir das folgende Lemma.

1.7.3 Lemma

Seien $\chi \in \text{Irr}_0(B)$ und L ein RG -Gitter in B mit Charakter χ , dessen Reduktion modulo p uniseriell ist. Dann tritt für den Green-Korrespondenten $f(L)$, der im Brauer-Korrespondenten von B , dem Block b von N , liegt, einer der beiden folgenden Fälle ein:

- (i) Der Modul $K \otimes f(L)$ ist irreduzibel.
- (ii) Der Modul $K \otimes \Omega(f(L))$ ist irreduzibel.

Beweis: [Fei, Lemma 5.8, S. 292]. \square

1.7.4 Lemma

Die Voraussetzungen seien wie in Lemma 1.7.3. Weiter sei $\chi_0 \in \text{Irr}(b)$, so dass D enthalten ist im Kern von χ_0 . Seien x ein Erzeuger von D und $y \in C_G(x)$ ein p' -Element. Dann gilt:

- (i) Ist $K \otimes f(L)$ irreduzibel, so ist

$$\chi(xy) = \chi_0(y).$$

- (ii) Ist $K \otimes \Omega(f(L))$ irreduzibel, so ist

$$\chi(xy) = -\chi_0(y).$$

Beweis: [BBB, Lemma 4.4.6., S. 48]. \square

1.7.5 Definition

Unter den Voraussetzungen von Lemma 1.7.3 definieren wir den *Charaktertyp* von χ . Wir sagen, χ ist vom Typ \times , falls der erste Fall in Lemma 1.7.3 eintritt. Im zweiten Fall sagen wir, χ ist vom Typ \circ .

1.7.6 Bemerkung

Welcher der beiden Fälle in Lemma 1.7.3 eintritt, hängt nach Lemma 1.7.4 nicht vom Gitter L , sondern nur vom Charakter χ ab.

Setzen wir in Lemma 1.7.4 das Element $y = 1$, so sehen wir, dass der Wert eines Charakters vom Typ \times auf einem Erzeuger von D eine positive ganze Zahl ist, bei einem Charakter vom Typ \circ eine negative ganze Zahl. Dies erklärt den Kommentar nach Definition 1.1.5.

Die folgenden Lemmas sagen in diesem Zusammenhang etwas zur Eindeutigkeit des Gitters L und zur Vertauschbarkeit von Green-Korrespondenz und Reduktion modulo p .

1.7.7 Lemma

Mit den Voraussetzungen von Lemma 1.7.3 gilt: Das Gitter L ist durch $\overline{f(L)}$, die Reduktion modulo p des Green-Korrespondenten von L , bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis: [BBB, Lemma 4.4.4., S. 48]. \square

1.7.8 Lemma

Sei L ein RG -Gitter, so dass \overline{L} unzerlegbar ist. Dann gilt:

$$f(\overline{L}) \cong \overline{f(L)}.$$

Beweis: [Fei, Lemma 5.8, S. 119]. \square

1.8 Die Green-Korrespondenten der einfachen kG -Moduln

Wiederholen wir noch einmal kurz die bisherigen Ergebnisse und formulieren damit die Voraussetzungen dieses Abschnitts. Die p -Sylogruppe unserer endlichen Gruppe G habe die Ordnung p . Es seien B ein Block von G mit Defektgruppe D und b der Brauer-Korrespondent von B im Normalisator N von D . Den Block b von N haben wir im Abschnitt 1.5 beschrieben. Es gibt in b genau e einfache kN -Moduln, wobei $e = |T(\beta) : C|$ der Index des Zentralisators C von D in der Trägheitsgruppe eines Blocks β von C ist, der von b überdeckt wird. In Abschnitt 1.6 haben wir gesehen, dass alle unzerlegbaren kN -Moduln uniserial sind, und wir haben dort Tensorprodukte zwischen solchen Moduln betrachtet. Wir wollen in diesem Abschnitt nun die Lücke zwischen Moduln im Block B und solchen im korrespondierenden Block b mithilfe der Green-Korrespondenz schließen. Wir werden sehen, wie wir Aussagen über den Brauer-Baum von B aus der Kenntnis des Brauer-Baums von N ableiten können. Dazu wollen wir uns die Green-Korrespondenten der einfachen kG -Moduln ansehen, welche, wie wir bereits wissen, im Block b liegen und uniserial sind.

1.8.1 Lemma

Im Block B gibt es genau e einfache kG -Moduln.

Beweis: [Fei, Theorem 2.1, S. 275]. □

Die Anzahl der einfachen kG -Moduln in B ist also gleich der Anzahl der einfachen kN -Moduln in seinem Brauer-Korrespondenten b . Beginnen wir mit der Beschreibung der Green-Korrespondenten.

1.8.2 Satz

- (i) *Zu jedem einfachen kN -Modul V in b existiert ein einfacher kG -Modul S in B , so dass V isomorph zum Sockel des Green-Korrespondenten von S ist: $V \cong \text{soc}(f(S))$.*
- (ii) *Zu jedem einfachen kN -Modul W in b existiert ein einfacher kG -Modul T in B , so dass W isomorph zum Kopf des Green-Korrespondenten von T ist: $W \cong f(T)/\text{rad}(f(T))$.*

Beweis: [Alp, Theorem 1, S. 150]. □

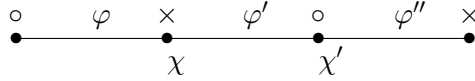
Insbesondere sind die Sockel der Green-Korrespondenten der einfachen kG -Moduln in B alle verschieden und jeder einfache kN -Modul in b kommt genau einmal als ein solcher Sockel vor. Gleiches gilt für die Köpfe dieser Green-Korrespondenten. Wir kommen nun zurück zum Brauer-Baum Γ_B von B . Das folgende Lemma zeigt, wie wir ausgehend vom eingebetteten Brauer-Baum $\Gamma_B^{(e)}$ die Sockel der Green-Korrespondenten bestimmen können, wenn wir einen von ihnen kennen.

1.8.3 Lemma

Sei $\varphi \in \text{IBr}(B)$ eine Kante des Brauer-Baums $\Gamma_B^{(e)}$. Der Sockel des Green-Korrespondenten von φ sei $\phi_i \in \text{IBr}(b)$. Ist φ' der Nachfolger von φ am Knoten χ vom Typ \times und φ'' dessen Nachfolger am Knoten χ' vom Typ \circ , so hat der Green-Korrespondent des Moduls mit Charakter φ'' den Sockel $\phi_{i+1} = \phi_i \otimes \hat{\alpha}$.

Beweis: [BBB, Lemma 4.4.14., S. 52]. □

Der Veranschaulichung dient die folgende Darstellung eines Teils von Γ_B . Dabei können z.B. die Kanten φ' und φ'' gleich sein. Von den Knoten χ und χ' können nach unten noch weitere Kanten ausgehen.

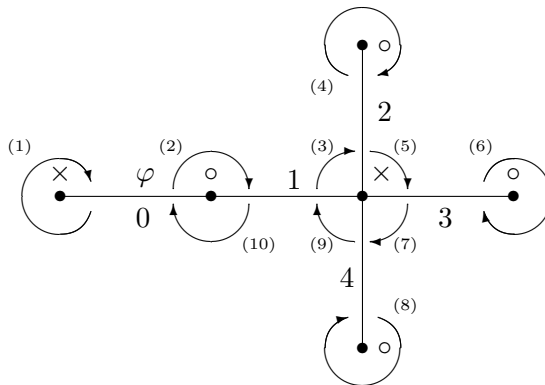


Mithilfe von Lemma 1.8.3 geben wir nun einen Algorithmus an, der wie oben beschrieben die Sockel der Green-Korrespondenten der einfachen kG -Moduln, also der Kanten des Brauer-Baums, bestimmt. Da die gesuchten Sockel einfache kN -Moduln, also irreduzible Brauer-Charaktere in b sind, reicht es, wenn wir jeder Kante von Γ_B die Nummer i des zu ihr gehörenden Sockels ϕ_i zuordnen.

1.8.4 Bemerkung (Walk around the Brauer tree)

Sei ϕ_i der Sockel des Green-Korrespondenten der Kante $\varphi \in \text{IBr}(B)$ von Γ_B . Wir nummerieren die Kante φ im eingebetteten Brauer-Baum mit i . Die nachfolgende Kante am mit φ verbundenen Knoten vom Typ \times lassen wir aus und nummerieren die dieser Kante nachfolgende Kante am Knoten vom Typ \circ mit $i+1$. Wir fahren fort, bis wir wieder bei der Ausgangskante angekommen sind. Die Nummern sind dabei modulo e zu interpretieren. Wir bezeichnen die Nummern auch als *Labels*.

Zu diesem Algorithmus vergleiche man [BBB, Remark 4.4.15., S. 52]. Als Beispiel diene der folgende eingebettete Brauer-Baum. Der bekannte Sockel sei ϕ_0 und gehöre zur Kante φ . Hier ist $e = 5$.



Wir benötigen in diesem Fall 10 Schritte, um alle Kanten zu nummerieren.

Nun formulieren wir ein Lemma, das bei der Bestimmung des Brauer-Baums von B ein wichtiges Werkzeug ist.

1.8.5 Lemma

Seien $\chi \in \text{Irr}_0(B)$ ein Knoten von Γ_B und $\varphi \in \text{IBr}(B)$ eine davon ausgehende Kante. Der Sockel des Green-Korrespondenten von φ sei ϕ_i . Sei V_i der zu ϕ_i gehörende einfache kN -Modul.

Dann existiert genau ein RG -Gitter L mit Charakter χ , dessen Reduktion modulo p uniserial ist, so dass

$$\text{soc}(f(\bar{L})) \cong V_i$$

ist, d.h. der Sockel des Green-Korrespondenten der Reduktion modulo p von L ist isomorph zu V_i .

Ist χ vom Typ \times , so gilt $f(\bar{L}) \cong V_i$, ist χ vom Typ \circ , so ist $f(\bar{L}) \cong \Omega(V_i)$.

Beweis: [BBB, Lemma 4.4.16., S. 53]. □

Also sind die Green-Korrespondenten von \bar{L} uniserialer Moduln der Länge 1 oder $p - 1$, was die Beschränkung in Lemma 1.6.5 auf solche Moduln rechtfertigt.

1.9 Tensorprodukte

In diesem letzten theoretischen Kapitel werden wir mithilfe von Tensorprodukten gewisser Charaktere von G , die als Knoten der Brauer-Bäume von G vorkommen und durchaus in verschiedenen Blöcken liegen können, Zusammenhänge zwischen den Nummern von Kanten (nach Bemerkung 1.8.4) bekommen, die mit den verwendeten Charakteren verbunden sind. Wir können so überprüfen, ob ein Brauer-Baum konsistent ist und eventuell Möglichkeiten ausschließen, oder aber überhaupt erst auf mögliche Kanten zwischen gewissen Knoten schließen. Wir wollen dies kurz erläutern.

Es seien B und B' Blöcke von G mit Defektgruppe D (die natürlich immer noch die Ordnung p habe) und b und b' deren Brauer-Korrespondenten im Normalisator $N = N_G(D)$. Der Hauptblock von N sei a . Nun seien weiter $\chi \in \text{Irr}_0(B)$ und $\chi' \in \text{Irr}_0(B')$ Knoten der Brauer-Bäume Γ_B bzw. $\Gamma_{B'}$ sowie $\varphi \in \text{IBr}(B)$ eine Kante von Γ_B , die von χ ausgeht und $\varphi' \in \text{IBr}(B')$ eine Kante von $\Gamma_{B'}$, die von χ' ausgeht. Für die Sockel der Green-Korrespondenten von φ und φ' gelte

$$\text{soc}(f(\varphi)) \cong \phi_i \text{ und } \text{soc}(f(\varphi')) \cong \phi'_{i'}.$$

Das bedeutet, die Kanten φ und φ' haben die Nummern i und i' .

Es seien L und L' die nach Lemma 1.8.5 existierenden eindeutig bestimmten RG -Gitter zu χ und φ bzw. χ' und φ' . Wir wollen das Tensorprodukt $\chi \otimes \chi'$ verwenden und interessieren uns deswegen für $L \otimes L'$. Mithilfe der Green-Korrespondenz können wir dieses Problem auf die Ebene des Normalisators N übertragen und betrachten das Produkt

$$f(\bar{L}) \otimes f(\bar{L}').$$

Nach Lemma 1.8.5 wissen wir, dass $f(\bar{L}) = {}_1b_i$ und $f(\bar{L}') = {}_{i'}b'_{i'}$ (mit den Bezeichnungen aus Definition 1.6.3) gilt, wobei $i, i' \in \{1, p - 1\}$ sind, je nach Typ der Charaktere χ und χ' . Also berechnen wir (siehe Lemma 1.6.4)

$${}_1b_i \otimes {}_{i'}b'_{i'} = ({}_1b_0 \otimes {}_{i'}b'_0) \otimes ({}_i a_i \otimes {}_{i'} a_{i'}).$$

Das Tensorprodukt ${}_1b_0 \otimes {}_{i'}b'_0$ berechnen wir aus der gewöhnlichen Charaktertafel von N/D über die zugehörigen Charaktere und erhalten als Ergebnis eine Summe von irreduziblen

Charakteren. Da $|N/D|$ nicht von p geteilt wird, sind alle $k(N/D)$ -Moduln halbeinfach und wir erhalten

$${}_1b_0 \otimes {}_1b'_0 = \bigoplus_{m=1}^s {}_1(b_m)_{i_m}$$

Dabei ist b_m ein Block von N und $i_m \in \{0, 1, \dots, e_m - 1\}$ für $1 \leq m \leq s$. Die Zahl e_m ist die Anzahl der irreduziblen Brauer-Charaktere im Block b_m . Die Moduln in der Summe haben alle Länge 1, da es die zu den irreduziblen Charakteren im obigen Tensorprodukt gehörenden einfachen Moduln sind.

Das Produkt ${}_l a_i \otimes {}_{l'} a_{i'}$ lässt sich mit Lemma 1.6.5 berechnen, und wir erhalten als Ergebnis

$${}_l a_i \otimes {}_{l'} a_{i'} \equiv {}_k a_j,$$

wobei wieder $k \in \{1, p-1\}$ ist.

Setzen wir dies zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} {}_l b_i \otimes {}_{l'} b'_{i'} &= ({}_1 b_0 \otimes {}_1 b'_0) \otimes ({}_l a_i \otimes {}_{l'} a_{i'}) \\ &\equiv \bigoplus_{m=1}^s {}_1(b_m)_{i_m} \otimes {}_k a_j \\ &= \bigoplus_{m=1}^s ({}_1(b_m)_0 \otimes {}_1 a_{i_m}) \otimes {}_k a_j \\ &\equiv \bigoplus_{m=1}^s ({}_1(b_m)_0 \otimes {}_k a_{(i_m+j)}) \\ &=: \bigoplus_{m=1}^s l_m (b_m)_{j_m}, \end{aligned}$$

mit $l_m \in \{1, p-1\}$. Bis auf projektive Moduln ergibt unser Tensorprodukt eine direkte Summe von unzerlegbaren kN -Moduln der Längen 1 oder $p-1$. Dies sind Green-Korrespondenten von Reduktionen modulo p von RG -Gittern wie in Lemma 1.8.5.

Es sei B_m der Brauer-Korrespondent von b_m in G . Zu jedem Summanden in der obigen Summe gibt es eine Kante mit Label j_m des Brauer-Baums Γ_{B_m} , d.h. einen irreduziblen Brauer-Charakter $\varphi_m \in \text{IBr}(B_m)$, und einen mit dieser Kante verbundenen Knoten $\chi_m \in \text{Irr}_0(B_m)$, so dass nach Lemma 1.8.5 ein RG -Gitter L_m mit $f(\bar{L}_m) = l_m b_{m,j_m}$ existiert. Es gilt also

$$f(\bar{L}) \otimes f(\bar{L}') = {}_l b_i \otimes {}_{l'} b'_{i'} \equiv \bigoplus_{m=1}^s l_m (b_m)_{j_m} = \bigoplus_{m=1}^s f(\bar{L}_m).$$

Wegen Lemma 1.7.8 und der Eindeutigkeit in Lemma 1.7.7, folgt mit Lemma 1.3.2 (i), dass die RG -Gitter L_m in $L \otimes L'$ vorkommen. Also müssen die χ_m als Summanden im Tensorprodukt $\chi \otimes \chi'$ vorkommen. Kommt der Knoten χ_m nicht im Tensorprodukt $\chi \otimes \chi'$ vor, so kann einer der betrachteten Brauer-Bäume nicht richtig sein. Kommt der Knoten vor, so können wir Aussagen über die Labels der von ihm ausgehenden Kanten treffen.

Indem wir das Tensorprodukt $\chi \otimes \chi'$ mit der gewöhnlichen Charaktertafel berechnen und in seine irreduziblen Konstituenten zerlegen, erhalten wir mit diesen Methoden Informationen über die eingebetteten Brauer-Bäume von G .

Kapitel 2

Das Monster in Charakteristik 29

Betrachten wir nun die Gruppe M (Monster) in Charakteristik $p = 29$. Die Ordnung von M ist

$$\begin{aligned} |M| &= 808.017.424.794.512.875.886.459.904.961.710.757.005.754.368 \cdot 10^9 \\ &= 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71. \end{aligned}$$

Also sind die p -Sylowgruppen von M zyklisch der Ordnung p . Die Voraussetzungen in Kapitel 1, die wir zur Anwendung der dort beschriebenen Methoden benötigen, sind also erfüllt.

2.1 Vorbemerkungen

Zur Berechnung der in diesem Kapitel vorgestellten Ergebnisse wurde als Werkzeug das Computeralgebrasystem GAP verwendet. Die projektiven Charaktere, die in den folgenden Abschnitten Verwendung finden, sind in GAP berechnet und dann in ihre irreduziblen Konstituenten zerlegte Tensorprodukte von Charakteren aus der gewöhnlichen Charaktertafel von M . Die verwendeten Produkte sind „von Hand“ so ausgewählt, dass man durch Hinsehen leicht Schlüsse aus ihnen ziehen kann. Das bedeutet, die gewählten projektiven Charaktere enthalten möglichst wenige irreduzible Konstituenten mit möglichst kleiner Vielfachheit (wie z.B. die Charaktere in Tabelle 2.2).

Ähnliches gilt für die Tensorprodukte, die im Abschnitt über die Anwendung der Green-Korrespondenz gebraucht werden. Hier wurden Tensorprodukte von solchen Charakteren ausprobiert, über deren Kanten wir Aussagen treffen wollen. Auch hier wurden die Tensorprodukte mit GAP berechnet und in ihre irreduziblen Konstituenten zerlegt.

Mit diesen Methoden kann natürlich nicht ausgeschlossen werden, dass projektive Charaktere oder Tensorprodukte übersehen wurden, die zu weitergehenden Erkenntnissen führen könnten.

Ebenfalls aus Berechnungen mit GAP ergibt sich, dass M in Charakteristik 29 zwei Blöcke vom Defekt $d = 1$ hat, den Hauptblock, der mit A bezeichnet sei, und einen zweiten Block B . Diese beiden Blöcke haben als Defektgruppen p -Sylowgruppen und sind damit von zyklischem Defekt. Der Hauptblock A enthält 29 gewöhnliche irreduzible Charaktere, der Block B dagegen 16.

2.2 Der reelle Stamm des Hauptblocks A

Die Anzahl der irreduziblen Brauer-Charaktere in A ist $e_A = 28$, was bedeutet, dass $\frac{p-1}{e_A} = 1$ ist. Es gibt also keine exzeptionellen Charaktere. Tabelle 2.1 stellt die gewöhnlichen irreduziblen Charaktere im Hauptblock A dar. Dabei entspricht die Bezeichnung in der ersten Spalte der Nummerierung in [Atl] und in der zweiten der laufenden Nummer im Block. In der dritten Spalte (\times/\circ) lässt sich der Typ eines jeden Charakters ablesen, während die vierte Spalte (cc) ein r enthält, falls der Charakter reellwertig ist. Sonst gibt diese Spalte in der Zeile eines Charakters die Nummer des zu diesem komplex konjugierten Charakters wieder.

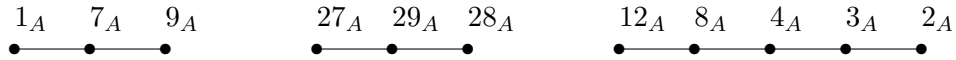
Atlas-Nr.	Block-Nr.	\times/\circ	cc
χ_1	1_A	\times	r
χ_3	2_A	\times	r
χ_8	3_A	\circ	r
χ_{15}	4_A	\times	r
χ_{16}	5_A	\circ	6_A
χ_{17}	6_A	\circ	5_A
χ_{21}	7_A	\circ	r
χ_{28}	8_A	\circ	r
χ_{29}	9_A	\times	r
χ_{39}	10_A	\circ	11_A
χ_{40}	11_A	\circ	10_A
χ_{52}	12_A	\times	r
χ_{59}	13_A	\times	14_A
χ_{60}	14_A	\times	13_A
χ_{65}	15_A	\circ	r
χ_{67}	16_A	\circ	r
χ_{78}	17_A	\times	r
χ_{85}	18_A	\circ	19_A
χ_{86}	19_A	\circ	18_A
χ_{102}	20_A	\circ	21_A
χ_{103}	21_A	\circ	20_A
χ_{111}	22_A	\times	r
χ_{133}	23_A	\circ	r
χ_{140}	24_A	\circ	r
χ_{143}	25_A	\times	r
χ_{155}	26_A	\circ	r
χ_{161}	27_A	\times	r
χ_{173}	28_A	\times	r
χ_{181}	29_A	\circ	r

Tabelle 2.1: Der Block A

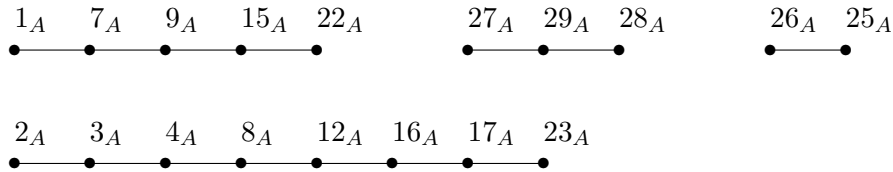
Zur Bestimmung des reellen Stamms des Brauer-Baums von A verwenden wir ausschließlich projektive Charaktere und deren eindeutige Zerlegung in projektive Charaktere der jeweiligen Blöcke. Die hier verwendeten projektiven Charaktere sind Tensorprodukte von gewöhnlichen irreduziblen Charakteren von M mit Defekt-0-Charakteren.

In Tabelle 2.2 steht in der Zeile zu Φ_i und in der Spalte zu j_A das Skalarprodukt von Φ_i mit j_A . Die Zeile zu Φ_i enthält also die Vielfachheiten der irreduziblen Konstituenten des im Block A liegenden Anteils von Φ_i . Dabei sind die leeren Einträge als 0 zu interpretieren. Die ersten drei Zeilen enthalten der Übersicht halber noch einmal die letzten drei Spalten aus Tabelle 2.1. Die Bezeichnung der in den Referenzen verwendeten Charaktere entspricht der Nummerierung in [Atl].

Die projektiven Charaktere Φ_1 und Φ_2 ergeben sofort, dass 2_A mit 3_A und 3_A mit 4_A verbunden sind. Genauso schließen wir für 27_A , 28_A und 29_A mittels Φ_4 und Φ_5 . Der Charakter Φ_3 liefert eine gemeinsame Kante von 4_A und 8_A . Aus Φ_6 ergibt sich nun mit der bereits gewonnenen Information, dass 7_A und 9_A verbunden sind. Mithilfe von Φ_7 erhalten wir dies für 1_A und 7_A , und mit Φ_8 für 8_A und 12_A . Damit erhalten wir die folgenden Teilgraphen des reellen Stamms von Γ_A .



Nun verwenden wir Φ_9 und sehen, dass 16_A und 17_A auf dem reellen Stamm benachbart sind. Gleiches folgt mit Φ_{10} für 15_A und 22_A sowie für 9_A und 15_A mit Φ_{11} . Jetzt hilft uns Φ_{12} um zu sehen, dass 12_A mit 16_A verbunden ist. Weiterhin sind 17_A und 23_A benachbart, was sich aus Φ_{13} ergibt. Mit Φ_{14} erkennen wir noch, dass 25_A und 26_A eine gemeinsame Kante besitzen. Damit erhalten wir die folgenden Teilstämme.



Aus dem projektiven Charakter Φ_{15} folgt, dass 25_A zusätzlich entweder mit 23_A oder mit 24_A verbunden ist. Nehmen wir an, 25_A habe mit 24_A eine gemeinsame Kante. Dann liefert aber Φ_{16} , dass 22_A mit 23_A verbunden ist. Zusätzlich liefert Φ_{15} eine gemeinsame Kante zwischen 23_A und 27_A . Damit hätte 23_A drei Kanten, die im reellen Stamm liegen. Dies ist ein Widerspruch, und deswegen folgt, dass 25_A und 23_A verbunden sind und sowohl 22_A mit 24_A als auch 24_A mit 27_A . Schließlich verwenden wir noch Φ_{17} , um zu sehen, dass 26_A und 28_A eine gemeinsame Kante besitzen. Damit erhalten wir für den Hauptblock A den folgenden reellen Stamm.

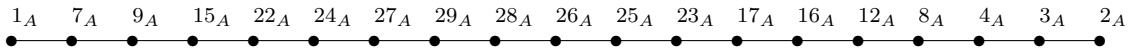


Abbildung 2.1: Der reelle Stamm S_A von A

Nr.	1 _A	2 _A	3 _A	4 _A	5 _A	6 _A	7 _A	8 _A	9 _A	10 _A	11 _A	12 _A	13 _A	14 _A	15 _A
cc	r	r	r	r	6 _A	5 _A	r	r	r	11 _A	10 _A	r	14 _A	13 _A	r
×/○	×	×	○	×	○	○	○	○	×	○	○	×	×	×	○
Φ ₁		1	1												
Φ ₂			1	1											
Φ ₃			1	2				1							
Φ ₄															
Φ ₅															
Φ ₆				1			1	1	1						
Φ ₇	1	1	3	2			1								
Φ ₈			1	2			1	2	1			1			
Φ ₉								1				1			
Φ ₁₀							1	1	1			1			1
Φ ₁₁			1	2			1	2	2			1			1
Φ ₁₂												1			1
Φ ₁₃			5	13			8	17	12			20			6
Φ ₁₄												2			1
Φ ₁₅															
Φ ₁₆															1
Φ ₁₇															

Nr.	16 _A	17 _A	18 _A	19 _A	20 _A	21 _A	22 _A	23 _A	24 _A	25 _A	26 _A	27 _A	28 _A	29 _A
cc	r	r	19 _A	18 _A	21 _A	20 _A	r	r	r	r	r	r	r	r
×/○	○	×	○	○	○	○	×	○	○	×	○	×	×	○
Φ ₁														
Φ ₂														
Φ ₃														
Φ ₄													1	1
Φ ₅												1		1
Φ ₆														
Φ ₇														
Φ ₈														
Φ ₉	1	1												
Φ ₁₀							1							
Φ ₁₁														
Φ ₁₂	2	1					1							
Φ ₁₃	14	4					2	1						
Φ ₁₄	3	1					1			1	1			
Φ ₁₅							1	1	1	2	1	1		
Φ ₁₆							2	1	1	1				
Φ ₁₇								1	1	2	2	1	1	

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \chi_2 \otimes \chi_4, & \Phi_2 &= \chi_2 \otimes \chi_5, & \Phi_3 &= \chi_2 \otimes \chi_{13}, & \Phi_4 &= \chi_3 \otimes \chi_{41}, & \Phi_5 &= \chi_2 \otimes \chi_{69}, \\
\Phi_6 &= \chi_2 \otimes \chi_{14}, & \Phi_7 &= \chi_4 \otimes \chi_4, & \Phi_8 &= \chi_2 \otimes \chi_{20}, & \Phi_9 &= \chi_2 \otimes \chi_{32}, & \Phi_{10} &= \chi_2 \otimes \chi_{34}, \\
\Phi_{11} &= \chi_3 \otimes \chi_{14}, & \Phi_{12} &= \chi_2 \otimes \chi_{50}, & \Phi_{13} &= \chi_4 \otimes \chi_{20}, & \Phi_{14} &= \chi_2 \otimes \chi_{49}, & \Phi_{15} &= \chi_2 \otimes \chi_{70}, \\
\Phi_{16} &= \chi_3 \otimes \chi_{35}, & \Phi_{17} &= \chi_3 \otimes \chi_{47}
\end{aligned}$$

Tabelle 2.2: Projektive im Block A

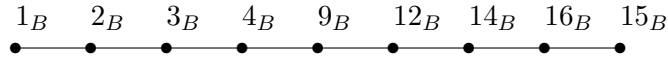
2.3 Der reelle Stamm des zweiten Blocks B

Die Anzahl der irreduziblen Brauer-Charaktere in B ist $e_B = 14$, d.h. $\frac{p-1}{e_B} = 2$. Die gewöhnlichen irreduziblen Charaktere 7_B und 8_B sind die exzeptionellen Charaktere.

Atlas-Nr.	Block-Nr.	\times/\circ	cc
χ_2	1_B	\times	r
χ_9	2_B	\circ	r
χ_{19}	3_B	\times	r
χ_{43}	4_B	\circ	r
χ_{55}	5_B	\circ	6_B
χ_{56}	6_B	\circ	5_B
χ_{71}	7_B	\times	8_B
χ_{72}	8_B	\times	7_B
χ_{80}	9_B	\times	r
χ_{88}	10_B	\circ	r
χ_{119}	11_B	\times	r
χ_{120}	12_B	\circ	r
χ_{138}	13_B	\circ	r
χ_{168}	14_B	\times	r
χ_{183}	15_B	\times	r
χ_{193}	16_B	\circ	r

Tabelle 2.3: Der Block B

Wie im vorhergehenden Abschnitt erhalten wir aus den projektiven Charakteren Φ_1 bis Φ_8 in Tabelle 2.4 den folgenden Teilgraphen des reellen Stamms von B .



Es folgt weiter aus Φ_9 , dass 13_B und 15_B verbunden sind, und aus Φ_{10} folgt dies für 11_B und 13_B . Mit dem projektiven Charakter Φ_{11} schließen wir auf eine gemeinsame Kante von 10_B und 11_B . Da der exzeptionelle Charakter $7_B + 8_B$ vom Typ \times ist, kann dieser nicht mit 1_B verbunden sein. So erhalten wir den reellen Stamm des Blocks B .

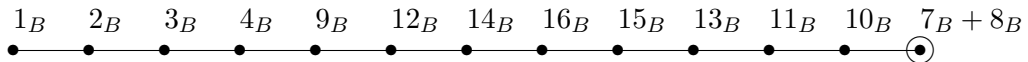


Abbildung 2.2: Der reelle Stamm S_B von B

Nr.	1_B	2_B	3_B	4_B	5_B	6_B	7_B	8_B	9_B	10_B	11_B	12_B	13_B	14_B	15_B	16_B
cc	r	r	r	r	6_B	5_B	8_B	7_B	r	r	r	r	r	r	r	r
\times/\circ	\times	\circ	\times	\circ	\circ	\circ	\times	\times	\times	\circ	\times	\circ	\circ	\times	\times	\circ
Φ_1	1	1														
Φ_2		1	1													
Φ_3															1	1
Φ_4		1	2	1												
Φ_5				1				1								
Φ_6				1				2			1					
Φ_7				1				1			1			1		
Φ_8														1	1	2
Φ_9													1	1	2	2
Φ_{10}										1			1	6	14	20
Φ_{11}									1	1	1	3		7	2	7

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \chi_2 \otimes \chi_4, & \Phi_2 &= \chi_2 \otimes \chi_7, & \Phi_3 &= \chi_4 \otimes \chi_{26}, & \Phi_4 &= \chi_2 \otimes \chi_{20}, & \Phi_5 &= \chi_2 \otimes \chi_{32}, \\ \Phi_6 &= \chi_2 \otimes \chi_{49}, & \Phi_7 &= \chi_3 \otimes \chi_{35}, & \Phi_8 &= \chi_3 \otimes \chi_{41}, & \Phi_9 &= \chi_2 \otimes \chi_{69}, & \Phi_{10} &= \chi_6 \otimes \chi_{27}, \\ \Phi_{11} &= \chi_3 \otimes \chi_{51} \end{aligned}$$

Tabelle 2.4: Projektive im Block B

2.4 Die möglichen Brauer-Bäume für B

Nachdem nun die reellen Stämme der beiden Blöcke bestimmt wurden, geht es darum, die Positionen der übrigen Charaktere auf dem Brauer-Baum zu finden. Im Block B haben wir die beiden nichtreellwertigen, zueinander komplex konjugierten Charaktere 5_B und 6_B , und alle anderen Charaktere in B liegen auf dem reellen Stamm. Da komplexe Konjugation eine Spiegelung des Baumes am reellen Stamm bewirkt, müssen wir nur den Knoten auf dem Stamm bestimmen, mit dem 5_B verbunden ist. Dann ist klar, dass der Knoten 6_B gegenüber auf der anderen Seite des Stamms liegt und mit dem gleichen Knoten verbunden ist. Wir können die Möglichkeiten für Γ_B auf diejenigen in Abbildung 2.3 einschränken.

Um dies zu zeigen, verwenden wir wieder projektive Charaktere in B und das Konzept des Charaktertyps \times/\circ . Betrachten wir den folgenden projektiven Charakter:

$$\Phi_{12} = \chi_2 \otimes \chi_{128} \approx_B 5_B + 7 \cdot 11_B + 12_B + 21 \cdot 13_B + 132 \cdot 14_B + 327 \cdot 15_B + 443 \cdot 16_B.$$

Da die Charaktere 5_B , 12_B , 13_B und 16_B vom Typ \circ sind und 11_B , 14_B und 15_B vom Typ \times , muss also 5_B mit einem der Charaktere 11_B , 14_B oder 15_B eine gemeinsame Kante besitzen. Daher ergeben sich die drei möglichen Brauer-Bäume für den Block B in Abbildung 2.3. Wir werden versuchen im Verlauf des Kapitels den richtigen Brauer-Baum zu bestimmen. Dies wird in Abschnitt 2.7 geschehen.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass dies jeweils der in die Ebene eingebettete Brauer-Baum ist, da wir hierfür lediglich die Wahl getroffen haben, dass der Knoten 5_B in dieser Anordnung oberhalb des Stamms liegt. Die Bemerkung 2.7.1 weiter unten geht auf diese Thematik noch näher ein.

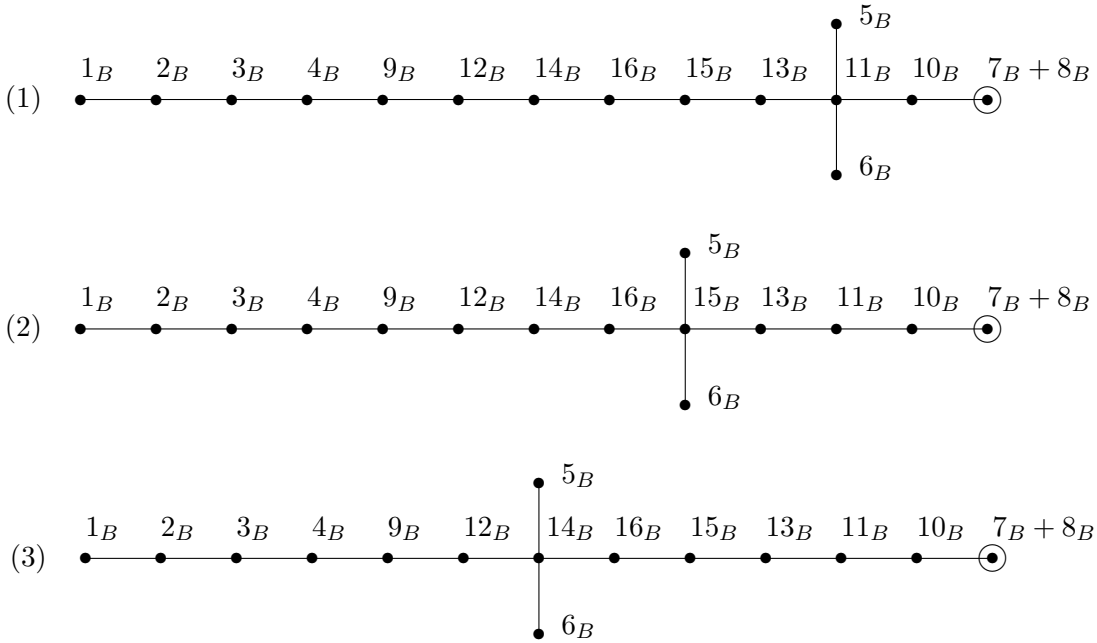


Abbildung 2.3: Die drei möglichen Brauer-Bäume für Γ_B

2.5 Die möglichen Brauer-Bäume für A

Mit den gleichen Methoden wie im letzten Abschnitt versuchen wir nun, die Möglichkeiten für den Brauer-Baum des Hauptblocks A einzuschränken. Dazu dienen die projektiven Charaktere in Tabelle 2.5. Die Einträge \dots stehen für von 0 verschiedene Zahlen, deren Kenntnis in unserer Argumentation nicht nötig ist und die aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen wurden.

Nr.	1_A	2_A	3_A	4_A	5_A	6_A	7_A	8_A	9_A	10_A	11_A	12_A	13_A	14_A	15_A
\times/\circ	\times	\times	\circ	\times	\circ	\circ	\circ	\circ	\times	\circ	\circ	\times	\times	\times	\circ
Φ_1															
Φ_2															
Φ_3										1					
Φ_4													1	1	
Φ_5					1								50	50	36

Nr.	16_A	17_A	18_A	19_A	20_A	21_A	22_A	23_A	24_A	25_A	26_A	27_A	28_A	29_A
\times/\circ	\circ	\times	\circ	\circ	\circ	\circ	\times	\circ	\circ	\times	\circ	\times	\times	\circ
Φ_1			1								1	3	8	9
Φ_2					1	1		7	12	22	60	80	169	190
Φ_3							1	1	4	7	11	10	17	18
Φ_4			1	1	1	1	2	16	24	33	84	116	243	268
Φ_5	74

$$\Phi_1 = \chi_2 \otimes \chi_{83} \quad \Phi_2 = \chi_7 \otimes \chi_{26} \quad \Phi_3 = \chi_4 \otimes \chi_{40} \quad \Phi_4 = \chi_2 \otimes \chi_{126} \quad \Phi_5 = \chi_4 \otimes \chi_{128}$$

Tabelle 2.5: Projektive im Block A

Den Einträgen in der Zeile zum Charakter Φ_1 entnehmen wir mithilfe des Konzepts von \times/\circ , dass 18_A eine gemeinsame Kante mit 27_A oder 28_A hat. Die Position von 19_A auf dem Baum folgt dann mit der Spiegelsymmetrie des Brauer-Baums. Genauso schließen wir für 20_A bzw. 21_A mit Φ_2 auf eine gemeinsame Kante mit 25_A , 27_A oder 28_A . Φ_3 ergibt, dass 10_A mit einem der Knoten 22_A , 25_A , 27_A oder 28_A verbunden ist. Aus Φ_4 liest man die Knoten ab, mit denen 13_A verbunden sein kann: 18_A , 19_A , 20_A , 21_A , 23_A , 24_A , 26_A oder 29_A . Φ_5 liefert die möglichen Knoten, mit denen 5_A verbunden ist: 13_A , 14_A , 17_A , 22_A , 25_A , 27_A , 28_A .

2.6 Der Normalisator der 29-Sylowgruppe

Wir möchten im Folgenden die Bestimmung der Brauer-Bäume der beiden Blöcke A und B mithilfe der Green-Korrespondenz - wie in Kapitel 1 erläutert - fortsetzen. Dazu betrachten wir den Normalisator einer 29-Sylowgruppe von M . Es bezeichne $D \leq M$ eine solche 29-Sylowgruppe, für die Ordnung von D gilt also $|D| = 29$. Seien weiter $N := N_M(D)$ der Normalisator und $C := C_M(D)$ der Zentralisator von D in M . Dann gilt: $D \trianglelefteq C \trianglelefteq N$. Aus der Charaktertafel von M in [Atl] können wir ablesen, dass C die Ordnung $|C| = 87 = 3 \cdot 29$ hat. Nach dem Satz von Sylow gibt es in C genau eine 29-Sylowgruppe und genau eine 3-Sylowgruppe, was bedeutet, dass C das direkte Produkt von D mit der Gruppe Q ist. Diese ist isomorph zur zyklischen Gruppe C_3 der Ordnung 3. Also gilt

$$C = D \times Q, \quad Q \cong C_3$$

(vgl. den Anfang von Abschnitt 1.5). Ebenfalls aus [Atl] entnehmen wir, dass es genau eine Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 29 gibt. Ist $x \in M$ ein Erzeuger von D , so existieren Elemente $1 = g_1, g_2, \dots, g_{28} \in N$ mit $g_i x g_i^{-1} = x^i$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, 28\}$. Sei ϱ_i der durch Konjugation von g_i auf D bewirkte Automorphismus, d.h.

$$\varrho_i : D \rightarrow D, \quad x \mapsto g_i x g_i^{-1}.$$

Dann gilt: $\varrho_i \neq \varrho_j$ für $i \neq j$. Wir erhalten 28 verschiedene Automorphismen von D . Da D eine zyklische Gruppe der Ordnung 29 ist, gilt $\text{Aut}(D) \cong C_{28}$, was bedeutet, dass

$$\text{Aut}(D) = \{\varrho_i \mid 1 \leq i \leq 28\}$$

ist. Die Faktorgruppe N/C ist isomorph zu einer Untergruppe von $\text{Aut}(D)$ und besitzt mindestens 28 Elemente, nämlich die Nebenklassen $g_i C$ mit den g_i wie oben. Also hat auch die Gruppe N/C die Ordnung 28 und es gilt somit

$$N/C \cong \text{Aut}(D) \cong C_{28}.$$

Der Normalisator von D in M ist also eine Erweiterung von C mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung 28 und hat deswegen die Ordnung $|N| = 29 \cdot 3 \cdot 28 = 2436$. Um uns über die Operation von N/C auf C klar zu werden, verwenden wir, dass es nach Bemerkung 1.5.6 eine Bijektion zwischen den Blöcken von M mit Defektgruppe D und den Bahnen von N auf den gewöhnlichen irreduziblen Charakteren von Q gibt. Die Gruppe N operiert dabei durch Konjugation. Da M zwei Blöcke vom Defekt 1 hat, gibt es zwei solcher Bahnen, was bedeutet, die Operation von N/C auf Q kann nicht trivial sein, da es dann drei Bahnen gäbe.

Nun konstruieren wir eine Permutationsgruppe, die zu N isomorph ist. Um den Zentralisator C zu erhalten, setzen wir

$$\sigma := (1, 2, 3, \dots, 29),$$

$$\rho := (30, 31, 32).$$

Die Gruppe C ist isomorph zu der von σ und ρ erzeugten Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_{32} auf 32 Punkten. Betrachten wir die Untergruppe von S_{32} , die von σ , ρ und dem Element $\pi := \tau\tau'$ mit

$$\tau = (2, 3, 5, 9, 17, 4, 7, 13, 25, 20, 10, 19, 8, 15, 29, 28, 26, 22, 14, 27, 24, 18, 6, 11, 21, 12, 23, 16),$$

$$\tau' = (31, 32)$$

erzeugt wird. Es gilt $\pi\sigma\pi^{-1} = \sigma^2$, $\pi\rho\pi^{-1} = \rho^2$ und $\pi^{28} = 1$. Daher ist diese Untergruppe isomorph zu N . Wir können also die Charaktertafel von N mithilfe der zu N isomorphen Permutationsgruppe berechnen. Die mit GAP berechnete Charaktertafel ist in Tabelle 2.6 dargestellt.

Der Normalisator N hat in Charakteristik 29 zwei Blöcke, nämlich die Brauer-Korrespondenten der Blöcke A und B . Der Hauptblock, welcher nach Satz 1.4.3 der Brauer-Korrespondent des Hauptblocks A von M ist, sei mit a bezeichnet, der zu B korrespondierende Block mit b . Der Block a enthält die Charaktere λ_1 bis λ_{28} sowie λ_{43} (mit den Bezeichnungen aus Tabelle 2.6), der Block b die übrigen Charaktere λ_{29} bis λ_{42} sowie λ_{44} und λ_{45} . Dabei sind λ_{44} und λ_{45} die exzeptionellen Charaktere. Wir wissen aus Lemma 1.4.4, dass der Green-Korrespondent eines Moduls in einem Block von M im Brauer-Korrespondenten dieses Blocks liegt. In Satz 1.5.8 haben wir gesehen, dass die Brauer-Bäume der Blöcke a und b Sterne sind. In unserem speziellen Fall haben sie die folgende Gestalt. Dabei ist α der lineare Charakter von N wie vor Satz 1.5.7. Wir können für α den Charakter λ_6 wählen. Als ζ_0 in b (vgl. Satz 1.5.8) wählen wir den Charakter λ_{30} .

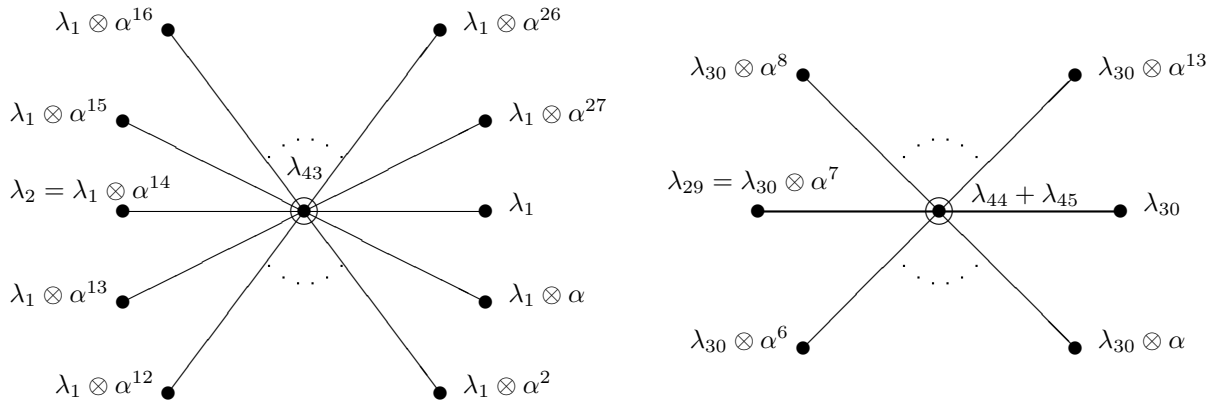


Abbildung 2.4: Die Brauer-Bäume der Blöcke a und b von N

	1a	29a	3a	87a	87b	7a	21a	7b	21b	7c	21c	7d	21d	7e	21e	7f	21f	14a	42a	14b	42b	2a	6a
λ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
λ_2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
λ_3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
λ_4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
λ_5	1	1	1	1	1	B	B	D	D	C	C	\bar{B}	\bar{B}	\bar{D}	\bar{D}	\bar{C}	\bar{C}	\bar{D}	\bar{D}	\bar{C}	\bar{C}	1	1
λ_6	1	1	1	1	1	B	B	D	D	C	C	\bar{B}	\bar{B}	\bar{D}	\bar{D}	\bar{C}	\bar{C}	$-\bar{D}$	$-\bar{D}$	$-\bar{C}$	$-\bar{C}$	-1	-1
λ_7	1	1	1	1	1	B	B	D	D	C	C	\bar{B}	\bar{B}	\bar{D}	\bar{D}	\bar{C}	\bar{C}	\bar{D}	\bar{D}	\bar{C}	\bar{C}	1	1
λ_8	1	1	1	1	1	B	B	D	D	C	C	\bar{B}	\bar{B}	\bar{D}	\bar{D}	\bar{C}	\bar{C}	$-\bar{D}$	$-\bar{D}$	$-\bar{C}$	$-\bar{C}$	-1	-1
λ_9	1	1	1	1	1	C	C	\bar{B}	\bar{B}	\bar{D}	\bar{D}	\bar{C}	\bar{C}	B	B	D	D	B	B	D	D	1	1
λ_{10}	1	1	1	1	1	C	C	\bar{B}	\bar{B}	\bar{D}	\bar{D}	\bar{C}	\bar{C}	B	B	D	D	$-B$	$-B$	$-D$	$-D$	-1	-1
λ_{11}	1	1	1	1	1	C	C	\bar{B}	\bar{B}	\bar{D}	\bar{D}	\bar{C}	\bar{C}	B	B	D	D	B	B	D	D	1	1
λ_{12}	1	1	1	1	1	C	C	\bar{B}	\bar{B}	\bar{D}	\bar{D}	\bar{C}	\bar{C}	B	B	D	D	$-B$	$-B$	$-D$	$-D$	-1	-1
λ_{13}	1	1	1	1	1	D	D	C	C	\bar{B}	\bar{B}	\bar{D}	\bar{D}	\bar{C}	\bar{C}	B	B	\bar{C}	\bar{C}	B	B	1	1
λ_{14}	1	1	1	1	1	D	D	C	C	\bar{B}	\bar{B}	\bar{D}	\bar{D}	\bar{C}	\bar{C}	B	B	$-\bar{C}$	$-\bar{C}$	$-B$	$-B$	-1	-1
λ_{15}	1	1	1	1	1	D	D	C	C	\bar{B}	\bar{B}	\bar{D}	\bar{D}	\bar{C}	\bar{C}	B	B	\bar{C}	\bar{C}	B	B	1	1
λ_{16}	1	1	1	1	1	D	D	C	C	\bar{B}	\bar{B}	\bar{D}	\bar{D}	\bar{C}	\bar{C}	B	B	$-\bar{C}$	$-\bar{C}$	$-B$	$-B$	-1	-1
λ_{17}	1	1	1	1	1	\bar{D}	\bar{D}	\bar{C}	\bar{C}	B	B	D	D	C	C	\bar{B}	\bar{B}	C	C	\bar{B}	\bar{B}	1	1
λ_{18}	1	1	1	1	1	\bar{D}	\bar{D}	\bar{C}	\bar{C}	B	B	D	D	C	C	\bar{B}	\bar{B}	$-C$	$-C$	$-\bar{B}$	$-\bar{B}$	-1	-1
λ_{19}	1	1	1	1	1	\bar{D}	\bar{D}	\bar{C}	\bar{C}	B	B	D	D	C	C	\bar{B}	\bar{B}	C	C	\bar{B}	\bar{B}	1	1
λ_{20}	1	1	1	1	1	\bar{D}	\bar{D}	\bar{C}	\bar{C}	B	B	D	D	C	C	\bar{B}	\bar{B}	$-C$	$-C$	$-\bar{B}$	$-\bar{B}$	-1	-1
λ_{21}	1	1	1	1	1	\bar{C}	\bar{C}	B	B	D	D	C	C	\bar{B}	\bar{B}	\bar{D}	\bar{D}	\bar{B}	\bar{B}	\bar{D}	\bar{D}	1	1
λ_{22}	1	1	1	1	1	\bar{C}	\bar{C}	B	B	D	D	C	C	\bar{B}	\bar{B}	\bar{D}	\bar{D}	$-\bar{B}$	$-\bar{B}$	$-\bar{D}$	$-\bar{D}$	-1	-1
λ_{23}	1	1	1	1	1	\bar{C}	\bar{C}	B	B	D	D	C	C	\bar{B}	\bar{B}	\bar{D}	\bar{D}	\bar{B}	\bar{B}	\bar{D}	\bar{D}	1	1
λ_{24}	1	1	1	1	1	\bar{C}	\bar{C}	B	B	D	D	C	C	\bar{B}	\bar{B}	\bar{D}	\bar{D}	$-\bar{B}$	$-\bar{B}$	$-\bar{D}$	$-\bar{D}$	-1	-1
λ_{25}	1	1	1	1	1	\bar{B}	\bar{B}	\bar{D}	\bar{D}	\bar{C}	\bar{C}	B	B	D	D	C	C	D	D	C	C	1	1
λ_{26}	1	1	1	1	1	\bar{B}	\bar{B}	\bar{D}	\bar{D}	\bar{C}	\bar{C}	B	B	D	D	C	C	$-D$	$-D$	$-C$	$-C$	-1	-1
λ_{27}	1	1	1	1	1	\bar{B}	\bar{B}	\bar{D}	\bar{D}	\bar{C}	\bar{C}	B	B	D	D	C	C	D	D	C	C	1	1
λ_{28}	1	1	1	1	1	\bar{B}	\bar{B}	\bar{D}	\bar{D}	\bar{C}	\bar{C}	B	B	D	D	C	C	$-D$	$-D$	$-C$	$-C$	-1	-1
λ_{29}	2	2	-1	-1	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	-2	1	-2	1	-2	1
λ_{30}	2	2	-1	-1	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1
λ_{31}	2	2	-1	-1	-1	E	$-C$	G	$-\bar{B}$	\bar{F}	$-\bar{D}$	\bar{E}	$-\bar{C}$	\bar{G}	$-B$	F	$-D$	$-\bar{G}$	B	$-F$	D	-2	1
λ_{32}	2	2	-1	-1	-1	E	$-C$	G	$-\bar{B}$	\bar{F}	$-\bar{D}$	\bar{E}	$-\bar{C}$	\bar{G}	$-B$	F	$-D$	\bar{G}	$-B$	F	$-D$	2	-1
λ_{33}	2	2	-1	-1	-1	F	$-D$	E	$-C$	G	$-\bar{B}$	\bar{F}	$-\bar{D}$	\bar{E}	$-\bar{C}$	\bar{G}	$-B$	$-\bar{E}$	\bar{C}	$-\bar{G}$	B	-2	1
λ_{34}	2	2	-1	-1	-1	F	$-D$	E	$-C$	G	$-\bar{B}$	\bar{F}	$-\bar{D}$	\bar{E}	$-\bar{C}$	\bar{G}	$-B$	\bar{E}	$-\bar{C}$	\bar{G}	$-B$	2	-1
λ_{35}	2	2	-1	-1	-1	\bar{F}	$-\bar{D}$	\bar{E}	$-\bar{C}$	\bar{G}	$-B$	F	$-D$	E	$-C$	G	$-\bar{B}$	$-E$	C	$-G$	\bar{B}	-2	1
λ_{36}	2	2	-1	-1	-1	\bar{F}	$-\bar{D}$	\bar{E}	$-\bar{C}$	\bar{G}	$-B$	F	$-D$	E	$-C$	G	$-\bar{B}$	E	$-C$	G	$-\bar{B}$	2	-1
λ_{37}	2	2	-1	-1	-1	\bar{E}	$-\bar{C}$	\bar{G}	$-B$	F	$-D$	E	$-C$	G	$-\bar{B}$	\bar{F}	$-\bar{D}$	$-G$	\bar{B}	$-\bar{F}$	\bar{D}	-2	1
λ_{38}	2	2	-1	-1	-1	\bar{E}	$-\bar{C}$	\bar{G}	$-B$	F	$-D$	E	$-C$	G	$-\bar{B}$	\bar{F}	$-\bar{D}$	G	$-\bar{B}$	\bar{F}	$-\bar{D}$	2	-1
λ_{39}	2	2	-1	-1	-1	G	$-\bar{B}$	\bar{F}	$-\bar{D}$	\bar{E}	$-\bar{C}$	\bar{G}	$-B$	F	$-D$	E	$-C$	$-F$	D	$-E$	C	-2	1
λ_{40}	2	2	-1	-1	-1	G	$-\bar{B}$	\bar{F}	$-\bar{D}$	\bar{E}	$-\bar{C}$	\bar{G}	$-B$	F	$-D$	E	$-C$	F	$-D$	E	$-C$	2	-1
λ_{41}	2	2	-1	-1	-1	\bar{G}	$-B$	F	$-D$	E	$-C$	G	$-\bar{B}$	\bar{F}	$-\bar{D}$	\bar{E}	$-\bar{C}$	$-\bar{F}$	\bar{D}	$-\bar{E}$	\bar{C}	-2	1
λ_{42}	2	2	-1	-1	-1	\bar{G}	$-B$	F	$-D$	E	$-C$	G	$-\bar{B}$	\bar{F}	$-\bar{D}$	\bar{E}	$-\bar{C}$	\bar{F}	$-\bar{D}$	\bar{E}	$-\bar{C}$	2	-1
λ_{43}	28	-1	28	-1	-1
λ_{44}	28	-1	-14	A	\bar{A}
λ_{45}	28	-1	-14	\bar{A}	A

Tabelle 2.6: Die Charaktertafel des Normalisators N

14c	42c	14d	42d	14e	42e	14f	42f	28a	28b	28c	28d	28e	28f	4a	28g	4b	28h	28i	28j	28k	28l
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	H	H	H	H	H	H	H	-H	-H	-H	-H	-H	-H	-H
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-H	-H	-H	-H	-H	-H	-H	H	H	H	H	H	H	H
\bar{B}	\bar{B}	D	D	B	B	C	C	C	D	\bar{C}	\bar{D}	B	\bar{B}	1	\bar{B}	1	C	B	\bar{C}	D	\bar{D}
$-\bar{B}$	$-\bar{B}$	-D	-D	-B	-B	-C	-C	I	- \bar{J}	$-\bar{I}$	J	$-\bar{K}$	K	H	-K	-H	-I	\bar{K}	\bar{I}	J	-J
\bar{B}	\bar{B}	D	D	B	B	C	C	-C	-D	$-\bar{C}$	$-\bar{D}$	-B	$-\bar{B}$	-1	$-\bar{B}$	-1	-C	-B	$-\bar{C}$	-D	$-\bar{D}$
$-\bar{B}$	$-\bar{B}$	-D	-D	-B	-B	-C	-C	-I	J	\bar{I}	-J	\bar{K}	-K	-H	K	H	I	$-\bar{K}$	$-\bar{I}$	-J	J
\bar{C}	\bar{C}	\bar{B}	\bar{B}	C	C	\bar{D}	\bar{D}	\bar{D}	\bar{B}	D	B	C	\bar{C}	1	\bar{C}	1	\bar{D}	C	D	\bar{B}	B
$-\bar{C}$	$-\bar{C}$	$-\bar{B}$	$-\bar{B}$	-C	-C	$-\bar{D}$	$-\bar{D}$	J	K	$-\bar{J}$	$-\bar{K}$	I	$-\bar{I}$	H	\bar{I}	-H	-J	-I	J	-K	\bar{K}
\bar{C}	\bar{C}	\bar{B}	\bar{B}	C	C	\bar{D}	\bar{D}	$-\bar{D}$	$-\bar{B}$	-D	-B	-C	$-\bar{C}$	-1	$-\bar{C}$	-1	$-\bar{D}$	-C	-D	$-\bar{B}$	-B
$-\bar{C}$	$-\bar{C}$	$-\bar{B}$	$-\bar{B}$	-C	-C	$-\bar{D}$	$-\bar{D}$	-J	-K	J	\bar{K}	-I	\bar{I}	-H	$-\bar{I}$	H	J	I	$-\bar{J}$	K	$-\bar{K}$
\bar{D}	\bar{D}	C	C	D	D	\bar{B}	\bar{B}	\bar{B}	C	B	\bar{C}	D	\bar{D}	1	\bar{D}	1	\bar{B}	D	B	C	\bar{C}
$-\bar{D}$	$-\bar{D}$	-C	-C	-D	-D	$-\bar{B}$	$-\bar{B}$	K	I	$-\bar{K}$	$-\bar{I}$	$-\bar{J}$	J	H	-J	-H	-K	J	\bar{K}	-I	\bar{I}
\bar{D}	\bar{D}	C	C	D	D	\bar{B}	\bar{B}	$-\bar{B}$	-C	-B	$-\bar{C}$	-D	$-\bar{D}$	-1	$-\bar{D}$	-1	$-\bar{B}$	-D	-B	-C	$-\bar{C}$
$-\bar{D}$	$-\bar{D}$	-C	-C	-D	-D	$-\bar{B}$	$-\bar{B}$	-K	-I	\bar{K}	\bar{I}	J	-J	-H	J	H	K	$-\bar{J}$	$-\bar{K}$	I	$-\bar{I}$
D	D	\bar{C}	\bar{C}	\bar{D}	\bar{D}	B	B	B	\bar{C}	\bar{B}	C	\bar{D}	D	1	D	1	B	\bar{D}	\bar{B}	\bar{C}	C
-D	-D	$-\bar{C}$	$-\bar{C}$	$-\bar{D}$	$-\bar{D}$	-B	-B	$-\bar{K}$	$-\bar{I}$	K	I	J	$-\bar{J}$	H	J	-H	\bar{K}	-J	-K	\bar{I}	-I
D	D	\bar{C}	\bar{C}	\bar{D}	\bar{D}	B	B	-B	$-\bar{C}$	$-\bar{B}$	-C	$-\bar{D}$	-D	-1	-D	-1	-B	$-\bar{D}$	$-\bar{B}$	$-\bar{C}$	-C
-D	-D	$-\bar{C}$	$-\bar{C}$	$-\bar{D}$	$-\bar{D}$	-B	-B	\bar{K}	\bar{I}	-K	-I	-J	J	-H	$-\bar{J}$	H	$-\bar{K}$	J	K	$-\bar{I}$	I
C	C	B	B	\bar{C}	\bar{C}	D	D	D	B	\bar{D}	\bar{B}	\bar{C}	C	1	C	1	D	\bar{C}	\bar{D}	B	\bar{B}
-C	-C	-B	-B	$-\bar{C}$	$-\bar{C}$	-D	-D	$-\bar{J}$	$-\bar{K}$	J	K	$-\bar{I}$	I	H	-I	-H	J	\bar{I}	-J	\bar{K}	-K
C	C	B	B	\bar{C}	\bar{C}	D	D	-D	-B	$-\bar{D}$	$-\bar{B}$	$-\bar{C}$	-C	-1	-C	-1	-D	$-\bar{C}$	$-\bar{D}$	-B	$-\bar{B}$
-C	-C	-B	-B	$-\bar{C}$	$-\bar{C}$	-D	-D	J	\bar{K}	-J	-K	\bar{I}	-I	-H	I	H	$-\bar{J}$	$-\bar{I}$	J	$-\bar{K}$	K
B	B	\bar{D}	\bar{D}	\bar{B}	\bar{B}	\bar{C}	\bar{C}	\bar{C}	\bar{D}	C	D	\bar{B}	B	1	B	1	\bar{C}	\bar{B}	C	\bar{D}	D
-B	-B	$-\bar{D}$	$-\bar{D}$	$-\bar{B}$	$-\bar{B}$	$-\bar{C}$	$-\bar{C}$	$-\bar{I}$	J	I	$-\bar{J}$	K	$-\bar{K}$	H	\bar{K}	-H	\bar{I}	-K	-I	-J	J
B	B	\bar{D}	\bar{D}	\bar{B}	\bar{B}	\bar{C}	\bar{C}	$-\bar{C}$	$-\bar{D}$	-C	-D	$-\bar{B}$	-B	-1	-B	-1	$-\bar{C}$	$-\bar{B}$	-C	$-\bar{D}$	-D
-B	-B	$-\bar{D}$	$-\bar{D}$	$-\bar{B}$	$-\bar{B}$	$-\bar{C}$	$-\bar{C}$	\bar{I}	-J	-I	J	-K	\bar{K}	-H	$-\bar{K}$	H	$-\bar{I}$	K	I	J	$-\bar{J}$
-2	1	-2	1	-2	1	-2	1
2	-1	2	-1	2	-1	2	-1
$-\bar{E}$	\bar{C}	-G	\bar{B}	-E	C	$-\bar{F}$	\bar{D}
\bar{E}	$-\bar{C}$	G	$-\bar{B}$	E	-C	\bar{F}	$-\bar{D}$
$-\bar{F}$	\bar{D}	-E	C	-F	D	-G	\bar{B}
\bar{F}	$-\bar{D}$	E	-C	F	-D	G	$-\bar{B}$
-F	D	$-\bar{E}$	\bar{C}	$-\bar{F}$	\bar{D}	$-\bar{G}$	B
F	-D	\bar{E}	$-\bar{C}$	\bar{F}	$-\bar{D}$	\bar{G}	-B
-E	C	$-\bar{G}$	B	$-\bar{E}$	\bar{C}	-F	D
E	-C	\bar{G}	-B	\bar{E}	$-\bar{C}$	F	-D
$-\bar{G}$	B	$-\bar{F}$	\bar{D}	-G	\bar{B}	$-\bar{E}$	\bar{C}
\bar{G}	-B	\bar{F}	$-\bar{D}$	G	$-\bar{B}$	\bar{E}	$-\bar{C}$
-G	\bar{B}	-F	D	$-\bar{G}$	B	-E	C
G	$-\bar{B}$	F	-D	\bar{G}	-B	E	-C
.
.
.

$$\begin{aligned}
 A &:= -b87 := \frac{1-i\sqrt{87}}{2}, & C &:= E(7)^2, & E &:= 2 \cdot E(7)^2, & G &:= 2 \cdot E(7)^6, & I &:= -E(28)^{15}, & K &:= -E(28)^3, \\
 B = E(7) &:= e^{\frac{2\pi i}{7}}, & D &:= E(7)^3, & F &:= 2 \cdot E(7)^3, & H &:= -i, & J &:= -E(28)^{23}
 \end{aligned}$$

2.7 Anwendung der Green-Korrespondenz

Wir wollen nun mithilfe der Green-Korrespondenz auf die Kanten zwischen den nicht-reellwertigen Knoten und den Knoten auf dem reellen Stamm schließen. Dazu verwenden wir Tensorprodukte von den zu betrachtenden Charakteren mit anderen Charakteren, die für unsere Berechnungen nützlich sind. Inwieweit ein bestimmter Charakter zu einem nützlichen Tensorprodukt führt, werden wir in den folgenden Schlussweisen sehen. Für die unzerlegbaren kN -Moduln verwenden wir die Schreibweise aus Definition 1.6.3. Ein solcher Modul wird mit ${}^l x_m$ bezeichnet. Dabei ist $x \in \{a, b\}$ der Block von N , in dem ${}^l x_m$ liegt, l ist die Länge seiner Kompositionsreihe und m die Nummer seines Sockels im Sinne von Abschnitt 1.8. Wir verwenden im Folgenden die Zeichen \equiv und \approx_X für einen Block X von M oder N , welche bedeuten:

- \equiv : Gleichheit bis auf projektive Charaktere oder Moduln,
 \approx_X : Gleichheit bis auf Charaktere oder Moduln in anderen Blöcken als X .

Wir nehmen in den folgenden Abschnitten jeweils eine der drei Möglichkeiten für Γ_B aus Abschnitt 2.4 als richtig an und schließen dann weiter auf den Brauer-Baum Γ_A von A . Zunächst machen wir einige Beobachtungen, die in allen drei Fällen zutreffen. Betrachten wir dazu den Charakter 1_B am Ende des reellen Stamms von Γ_B . Den Sockel des Green-Korrespondenten des kM -Moduls zum irreduziblen Brauer-Charakter $\widehat{1}_B$ bezeichnen wir mit ${}_1 b_0$, d.h. die von 1_B ausgehende Kante habe das Label 0. Als Sockel eines unzerlegbaren kN -Moduls hat ${}_1 b_0$ die Länge 1, weswegen die Bezeichnung berechtigt ist. Das nach Lemma 1.8.5 zum Knoten 1_B und der zugehörigen Kante $\widehat{1}_B$ existierende RM -Gitter nennen wir $B_0^{(1)}$. Der Modul $\overline{B}_0^{(1)}$, die Reduktion modulo p von $B_0^{(1)}$, hat den Charakter $\widehat{1}_B$ und ist daher selbstdual. Nach Lemma 1.3.2 ist auch der Green-Korrespondent $f(\overline{B}_0^{(1)})$ selbstdual, welcher wiederum nach Lemma 1.8.5 gleich ${}_1 b_0$ ist, da 1_B vom Typ \times ist, denn der Charakterwert von 1_B auf der Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 29 ist eine positive ganze Zahl (siehe auch Tabelle 2.3). Der Charakter zu ${}_1 b_0$ ist die Einschränkung auf die p' -Klassen eines gewöhnlichen irreduziblen Charakters von N , der ein Blatt des Brauer-Baums des Blocks b ist. Dies bedeutet, ${}_1 b_0$ hat entweder den Charakter $\widehat{\lambda}_{29}$ oder $\widehat{\lambda}_{30}$, weil dies die einzigen beiden reellwertigen irreduziblen Brauer-Charaktere in b sind. Wir wollen zeigen, dass $\widehat{\lambda}_{30}$ der richtige ist. Dazu berechnen wir folgendes Tensorprodukt (siehe Tabellen 2.8, 2.9 und 2.7):

$$1_B \otimes 1_B \equiv 1_A + 2_A + 1_B.$$

Alle hier vorkommenden Charaktere sind Blätter der Brauer-Bäume Γ_A bzw. Γ_B , da sie jeweils am Ende der reellen Stämme liegen und keiner der noch fehlenden Knoten mit einem von ihnen verbunden sein kann. Deswegen sind deren Einschränkungen auf die p' -Klassen irreduzible Brauer-Charaktere. Es folgt

$$\widehat{1}_B \otimes \widehat{1}_B \equiv \widehat{1}_A + \widehat{2}_A + \widehat{1}_B$$

und mit Lemma 1.3.2 daraus

$${}_1 b_0 \otimes {}_1 b_0 \approx_b {}_1 b_0.$$

Andererseits gilt:

$$\lambda_{29} \otimes \lambda_{29} = \lambda_{30} \otimes \lambda_{30} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{30}.$$

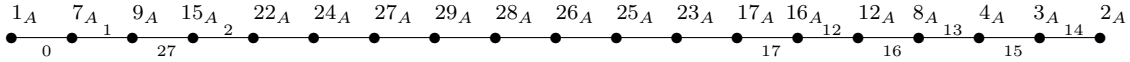
Da ${}_1b_0$ im Tensorprodukt mit sich selbst vorkommt, und λ_{29} dies nicht erfüllt, folgt sofort, dass $\widehat{\lambda}_{30}$ dem Charakter des Green-Korrespondenten $\widehat{{}_1b_0}$ entspricht.

Der Charakter zum trivialen Modul ${}_1a_0$ ist natürlich $\widehat{\lambda}_1$. Wenden wir den Algorithmus aus Bemerkung 1.8.4 auf den Brauer-Baum von a an, so hat die Kante zum Knoten λ_2 , der ja mit den Knoten λ_{43} und λ_1 den reellen Stamm S_a des Brauer-Baums von a bildet, die Nummer 14. Also hat der Modul ${}_1a_{14}$ den Charakter $\widehat{\lambda}_2$.

Aus diesen Überlegungen erhalten wir erneut mit Lemma 1.3.2

$${}_1b_0 \otimes {}_1b_0 \equiv {}_1a_0 \oplus {}_1a_{14} \oplus {}_1b_0.$$

Aufgrund der Spiegelsymmetrie des Brauer-Baums und des Algorithmus aus Bemerkung 1.8.4 folgt weiterhin, dass Kanten oberhalb des reellen Stamms von Γ_A nur Labels haben können, die größer als 0, aber kleiner als 14 sind. Die Labels der Kanten unterhalb des reellen Stamms sind daher größer als 14 und kleiner als 28. Wir können die möglichen Labels hier jedoch noch weiter einschränken, denn in Abschnitt 2.5 haben wir gesehen, dass die nichtreellwertigen Knoten nur mit den Knoten zwischen 22_A und 17_A einschließlich eine gemeinsame Kante haben können. Die in der folgenden Abbildung eingezeichneten Labels sind also bereits festgelegt.



Die Labels der noch fehlenden Kanten müssen also in der Menge $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ für Kanten oberhalb des reellen Stamms und in der Menge $\{18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26\}$ für Kanten unterhalb des reellen Stamms liegen. Aus Platzgründen werden wir in den folgenden Abbildungen die Knoten links von 15_A und rechts von 16_A weglassen, da diese Teilgraphen bereits bekannt sind.

2.7.1 Bemerkung

Wir teilen die nichtreellwertigen Charaktere, die zusätzlich nichtexzeptionell sind, in die folgenden Mengen auf:

$$O_1 := \{5_A, 6_A, 18_A, 19_A, 5_B, 6_B\},$$

$$O_2 := \{10_A, 11_A\},$$

$$O_3 := \{13_A, 14_A\},$$

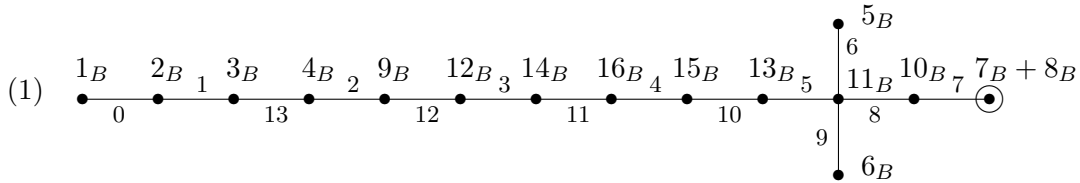
$$O_4 := \{20_A, 21_A\}.$$

Die Charaktere in O_1 haben Irrationalitäten, die im Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$ liegen. Diejenigen in O_2 haben solche in $\mathbb{Q}(\sqrt{-71})$ und die in O_3 haben Irrationalitäten in $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$. Schließlich liegen diejenigen der Charaktere in O_4 in $\mathbb{Q}(\sqrt{-59})$ (vgl. die Charaktertafel von M in [Atl]).

Je zwei Charaktere, die in verschiedenen der obigen Mengen liegen, haben also unabhängige Irrationalitäten, da sich die zugehörigen Erweiterungskörper von \mathbb{Q} in \mathbb{Q} schneiden. Man vergleiche dazu Seite 60 in [BBB]. Wir können deshalb im Folgenden aus jeder der obigen Mengen einen Charakter auswählen, der auf dem Brauer-Baum als erster vorkommt, wenn man im Uhrzeigersinn den Baum umläuft. Eine andere Wahl würde lediglich einer Änderung des p -modularen Zerfallungssystems (K, R, k) entsprechen. Da wir uns diesbezüglich nicht festgelegt haben, dürfen wir die Wahl treffen.

2.7.1 Die erste Möglichkeit für Γ_B

Nehmen wir also an, die Möglichkeit (1) aus Abschnitt 2.4 sei der korrekte Baum für Γ_B . In der folgenden Abbildung sind die Kanten bereits nach den Sockeln der Green-Korrespondenten der zugehörigen irreduziblen Brauer-Charaktere nummeriert.



Beginnen wir in diesem Fall mit der Auswertung einiger unserer Tensorprodukte. Die verwendeten Produkte wurden mit GAP berechnet und sind in den Tabellen 2.8, 2.9 und 2.7 in Abschnitt 2.9 gesammelt dargestellt. Wir tragen zunächst Informationen über die Labels einiger Kanten von beteiligten Charakteren zusammen, die wir mithilfe der Methoden aus Abschnitt 1.9 am Ende von Kapitel 1 erhalten.

2.7.2 Bemerkung

(i) Betrachten wir das folgende Tensorprodukt. Es gilt:

$$1_B \otimes 5_A \approx_B 5_B.$$

Wir nehmen eine beliebige Kante, die von 5_A ausgeht, welche das Label x habe. Für die Green-Korrespondenten ${}_1b_0$ und ${}_{28}a_x$ der Reduktionen modulo p der nach Lemma 1.8.5 zu 1_B und der einzigen von dort ausgehenden Kante bzw. zu 5_A und der Kante mit Label x existierenden RM -Gitter gilt mit Lemma 1.6.4

$${}_1b_0 \otimes {}_{28}a_x \equiv {}_{28}b_x.$$

Dies bedeutet, in unserem Tensorprodukt kommt ein Charakter aus der Menge $\text{Irr}_0(B)$ vom Typ \circ vor, dessen Label kongruent x modulo 14 ist. Man beachte, dass in b Labels modulo 14 interpretiert werden. Da 5_B der einzige in obigem Tensorprodukt vorkommende Charakter (vom Typ \circ) in B ist und die einzige von ihm ausgehende Kante die Nummer 6 hat, muss also $x \in \{6, 20\}$ gelten. Haben wir also eine Kante, die 5_A mit einem anderen Knoten verbindet, so hat diese Label 6 oder 20. Hiermit ist auch gezeigt, dass vom Knoten 5_A genau eine Kante ausgeht. Denn nach unseren Betrachtungen vor Bemerkung 2.7.1 muss eine Kante mit Label 6 oberhalb und eine Kante mit Label 20 unterhalb des reellen Stamms liegen. Es können also nicht zwei Kanten von 5_A ausgehen, da diese die Nummern 6 und 20 hätten und beide oberhalb oder unterhalb des reellen Stamms liegen würden.

(ii) Unter Verwendung von

$$1_B \otimes 6_A \approx_B 6_B$$

zeigen wir genauso, dass eine Kante, die von 6_A ausgeht, Label 9 oder 23 hat und dass es genau eine Kante gibt, die von 6_A ausgeht. Die Knoten 5_A und 6_A liegen auf dem Brauer-Baum gegenüber. Hat 5_A eine Kante mit Label 6, so muss die dazu gespiegelte Kante Label 23 haben. Entsprechendes gilt, falls die Kante zu 5_A Label 20 hat. Dann ist die Kante zu 6_A mit 9 nummeriert.

(iii) Die Nummerierung der Kanten am Knoten 10_B gibt Aufschluss über diejenige der Kanten am Knoten 10_A . Mit dem Tensorprodukt

$$1_B \otimes 10_A \approx_B 10_B$$

und der Beziehung

$$1b_0 \otimes 28a_x \equiv 28b_x$$

erhalten wir wie oben in (i) und (ii), dass für eine beliebige Kante, die von 10_A ausgeht und das Label x hat, $x \in \{7, 8, 21, 22\}$ gelten muss, da die Kanten, die vom Knoten 10_B ausgehen, Labels 7 und 8 haben. Die gleiche Bedingung erhalten wir mit dem Tensorprodukt

$$1_B \otimes 11_A \approx_B 10_B$$

für eine beliebige Kante, die von 11_A ausgeht. Da nach Abschnitt 2.5 keiner der nichtreellwertigen Knoten mit 10_A oder 11_A verbunden ist, folgt auch hier, dass die Kanten, die 10_A und 11_A mit dem reellen Stamm verbinden jeweils die einzigen Kanten sind, die von 10_A und 11_A ausgehen.

(iv) Wir schauen uns nun das Tensorprodukt

$$1_B \otimes 18_A \approx_B 5_B + 13_B + 14_B + 11 \cdot 15_B + 11 \cdot 16_B$$

an. Der Knoten 5_B ist mit keinem der Knoten 13_B , 14_B , 15_B oder 16_B verbunden und der Charakter $13_B + 14_B + 11 \cdot 15_B + 11 \cdot 16_B$ ist projektiv. Mithilfe von

$$1b_0 \otimes 28a_x \equiv 28b_x$$

folgt daraus, wenn x die Nummer einer fest gewählten beliebigen von 18_A ausgehenden Kante ist, dass der Green-Korrespondent der Reduktion modulo p des nach Lemma 1.8.5 zu 5_B und der einzigen davon ausgehenden Kante mit Label 6 existierenden RM -Gitters der Modul $28b_x$ ist. Also können wir wieder wie in (i) schließen, dass eine beliebige von 18_A ausgehende Kante das Label 6 oder 20 haben muss.

Da 5_A und 18_A beide vom Typ \circ sind, also nicht verbunden sein können, und die einzige von 5_A ausgehende Kante nach (i) ebenfalls Label 6 oder 20 hat, können auch von 18_A nicht mehrere Kanten ausgehen.

Das Tensorprodukt

$$1_B \otimes 19_A \approx_B 6_B + 13_B + 14_B + 11 \cdot 15_B + 11 \cdot 16_B$$

liefert die gleichen Ergebnisse für den Knoten 19_A , allerdings mit Labels 9 bzw. 23.

(v) Wir betrachten nun eine beliebige Kante, die vom Knoten 13_A ausgeht. Sie habe das Label x . Wir folgern mit dem Tensorprodukt

$$1_B \otimes 13_A \approx_B 15_B,$$

dass $x \in \{4, 10, 18, 24\}$ ist, denn 15_B hat in Γ_B genau zwei Kanten, die Labels 4 und 10 haben. Die Rechnung

$$1b_0 \otimes 1a_x \equiv 1b_x$$

zeigt uns also, dass $x \equiv 4 \pmod{14}$ oder $x \equiv 10 \pmod{14}$ ist. Wir verwenden das Tensorprodukt

$$1_B \otimes 14_A \approx_B 15_B,$$

um die gleiche Bedingung für das Label einer beliebigen Kante, die von 14_A ausgeht, zu erhalten.

(vi) Nun erörtern wir einen Zusammenhang zwischen den Kanten am Knoten 10_A und denen an 26_A . Es gilt

$$2_A \otimes 10_A \approx_A 26_A.$$

Sei x die Nummer einer Kante am Knoten 10_A . Wegen

$$1^{a_{14}} \otimes 28^{a_x} \equiv 28^{a_{(x+14)}}$$

gibt es eine Kante, die von 26_A ausgeht und Label $(x + 14) \pmod{28}$ hat. Das gleiche Ergebnis erhalten wir mit dem Tensorprodukt

$$2_A \otimes 11_A \approx_A 26_A$$

für den Knoten 11_A .

(vii) Wir können die Labels derjenigen Kanten, die von 20_A ausgehen, einschränken, wenn wir das Tensorprodukt

$$1_B \otimes 20_A \approx_B 2 \cdot 13_B + 14 \cdot 14_B + 25 \cdot 15_B + 38 \cdot 16_B$$

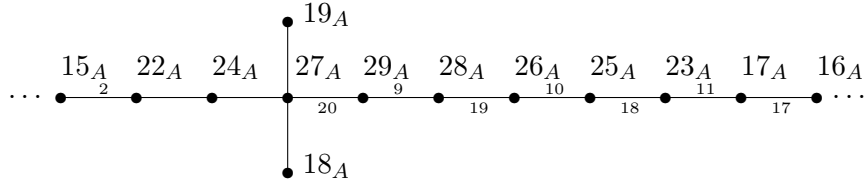
verwenden. Wir nehmen wieder eine beliebige Kante, die vom Knoten 20_A ausgeht und das Label x habe. Wir verwenden

$$1^{b_0} \otimes 28^{a_x} \equiv 28^{b_x},$$

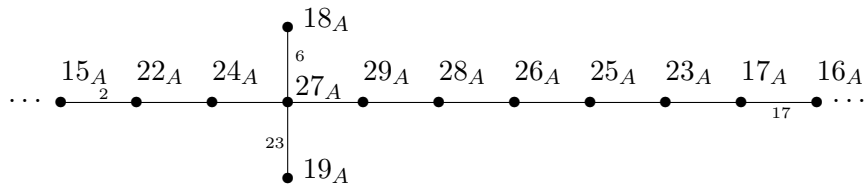
um zu sehen, dass im obigen Tensorprodukt ein Charakter vom Typ \circ vorkommt, von dem eine Kante ausgeht, deren Label kongruent x modulo 14 ist. Dies kann nur einer der beiden Charaktere 13_B und 16_B sein. Es ergibt sich, dass $x \equiv y \pmod{14}$ mit $y \in \{4, 5, 10, 11\}$ ist, da die Kanten, die von 13_B und 16_B ausgehen, diese Nummern haben. Also hat die gewählte Kante das Label $x \in \{4, 5, 10, 11, 18, 19, 24, 25\}$. Die gleichen Labels erhalten wir für eine Kante, die vom Knoten 21_A ausgeht, wenn wir das Tensorprodukt $1_B \otimes 21_A$ (siehe Tabellen in Abschnitt 2.9) betrachten.

Nun können wir auf die Gestalt des Baums Γ_A schließen. Nach Abschnitt 2.5 kann der Knoten zu 18_A nur mit 27_A oder 28_A verbunden sein. Wir zeigen, dass 18_A eine gemeinsame Kante mit 28_A hat.

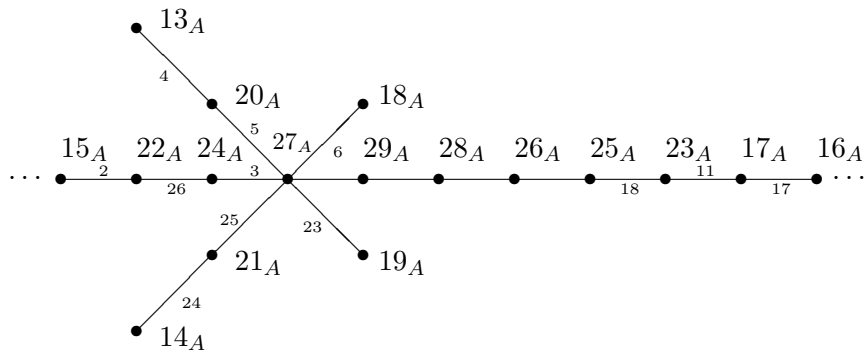
Dazu nehmen wir zunächst einmal an, 18_A sei mit 27_A verbunden. In Bemerkung 2.7.2 (iv) haben wir gesehen, dass vom Knoten 18_A genau eine Kante ausgeht, die das Label 6 oder 20 hat. Wir zeigen nun, dass 18_A oberhalb des reellen Stamms liegt und dass deswegen die Kante, die 18_A und 27_A verbindet, das Label 6 hat. Angenommen, der Knoten 18_A liege unterhalb des reellen Stamms. Dann müsste die Kante, die von 18_A ausgeht, das Label 20 haben, was jedoch unmöglich ist, selbst wenn rechts von 27_A am reellen Stamm keine zusätzlichen Kanten mehr abgehen. Dies kann man der Nummerierung der Kanten am folgenden Teilbaum für Γ_A entnehmen. Es ist zu beachten, dass die Labels 12, 13, 14, 15, 16 und 17 sowie 27, 0, 1 und 2 bereits festgelegt sind (siehe die Erläuterungen vor Bemerkung 2.7.1).



Wir können also schließen, dass der Knoten 18_A oberhalb des reellen Stamms liegt und die von ihm ausgehende Kante das Label 6 hat. Damit muss die Kante zu 19_A nach Bemerkung 2.7.2 (iv) das Label 23 haben. Der folgende Teilbaum steht also mit den eingetragenen Labels bereits fest.



Um für 18_A das Label 6 zu erhalten, müssen am Baum links von 27_A bzw. an 27_A selber noch genau zwei zusätzliche Kanten nach oben abgehen. Da die Kanten zu den Knoten 10_A und 11_A nach Bemerkung 2.7.2 nur Labels in der Menge $\{7, 8, 21, 22\}$ haben, liegen diese rechts von 18_A und 19_A . Dies bedeutet, die Paare 13_A und 14_A bzw. 20_A und 21_A haben Kanten mit Nummern in der Menge $\{3, 4, 5, 24, 25, 26\}$. Aus Abschnitt 2.5 können wir ersehen, dass 20_A und 21_A mit dem Knoten 27_A eine gemeinsame Kante haben müssen. Wir wählen nach Bemerkung 2.7.1 20_A als den zuerst vorkommenden Knoten. Für die beiden Knoten 13_A und 14_A bleiben dann als mögliche Partner nur noch die Knoten 20_A und 21_A oder der Knoten 24_A . Letzterer kommt nicht in Frage, da dann 13_A eine Kante mit Label 3 oder 25 hätte, was ein Widerspruch zu Bemerkung 2.7.2 (v) ist. Dann bleibt nur noch der folgende Teilbaum als Möglichkeit, wobei wir 13_A als den Knoten oberhalb des Stamms wählen.



Die Labels 11 und 18 können wir schon eintragen, da von den Knoten 17_A und 23_A keine Kanten ausgehen können. Die einzigen Knoten, die mit 23_A verbunden sein können sind nach Abschnitt 2.5 nämlich 13_A und 14_A . Am Knoten 17_A können nur die Charaktere 5_A und 6_A sitzen, die aber in unserem Fall nach Bemerkung 2.7.2 (i) und (ii) Kanten mit Labels 20 und 9 haben, was bei einer Verbindung mit 17_A nicht möglich ist.

Der obige Teilbaum ist jedoch nicht mit dem folgenden Tensorprodukt konsistent.

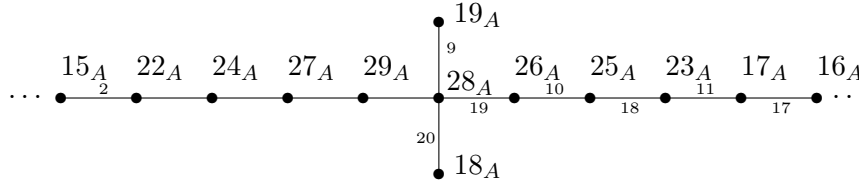
$$2_A \otimes 13_A \approx_A 14_A + 23_A + 24_A + 5 \cdot 26_A + 9 \cdot 27_A + 22 \cdot 28_A + 24 \cdot 29_A.$$

Wir erhalten aus

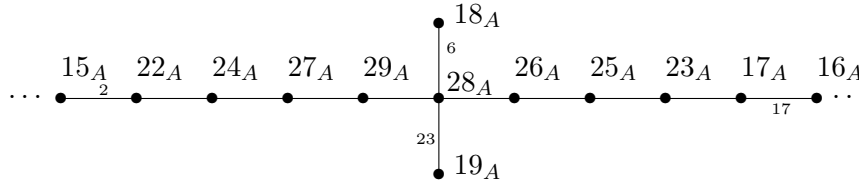
$$1a_{14} \otimes 1a_4 \equiv 1a_{18},$$

dass der Charakter vom Typ \times an der Kante mit Label 18 im obigen Tensorprodukt vorkommen muss. Dies ist der Charakter 25_A , welcher aber nicht vorkommt. Wir haben also einen Widerspruch.

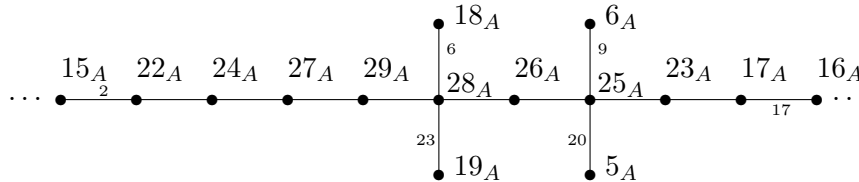
Es ist nun bewiesen, dass der Knoten 18_A mit 28_A verbunden ist. Wiederum muss die Kante von 18_A zu 28_A die Nummer 6 haben, denn andernfalls hätten wir den folgenden Teilbaum von Γ_A , wobei aufgrund der schon feststehenden Labels rechts von 19_A keine weitere Kante mehr abgehen darf, denn die Kante zwischen 19_A und 28_A muss ja die Nummer 9 haben (siehe Bemerkung 2.7.2). Das heißt, die eingezeichneten Labels sind schon bekannt.



Nach 2.7.2 (iii) hat entweder 10_A oder 11_A eine Kante mit Label 7 oder 8. Dann folgt aber mit 2.7.2 (vi), dass 26_A eine Kante mit Label 21 oder 22 hat. Dies ist ein Widerspruch. Also hat 18_A Label 6 und liegt in unserer Einbettung oberhalb des Stamms. Die Kante zum Knoten 19_A hat die Nummer 23, die zu 5_A Nummer 20 und die zu 6_A Nummer 9, was wir aus Bemerkung 2.7.2 (i), (ii) und (iv) entnehmen.



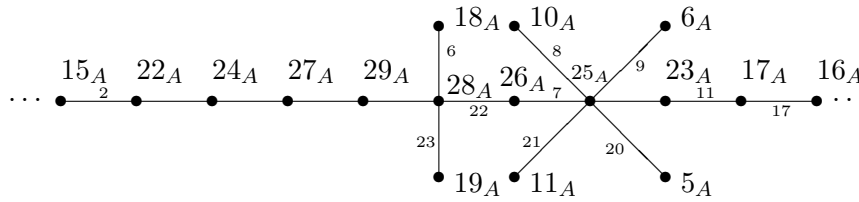
Dies bedeutet, 6_A liegt rechts von 18_A , hat also eine gemeinsame Kante mit den Knoten 17_A , 25_A oder 28_A . Der Knoten 17_A scheidet wie oben aus, da das Label der Kante zwischen 17_A und 6_A dann nicht 9 sondern 11 wäre. Wir zeigen nun, dass 6_A mit 25_A verbunden ist. Dazu nehmen wir an, es gebe eine gemeinsame Kante zwischen 28_A und 6_A . Nach den Ergebnissen aus Bemerkung 2.7.2 kann zwischen 18_A und 6_A nur noch 10_A bzw. 11_A mit dem Knoten 28_A verbunden sein. Dies bedeutet, dass die Kante von 6_A zu 28_A Label 8 und nicht Label 9 hat, was nicht sein kann. Wir haben also bisher den folgenden Teilbaum von Γ_A .



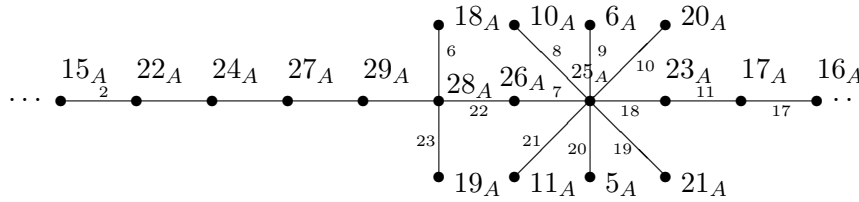
Nun bestimmen wir die Positionen von 10_A und 11_A . Nach Bemerkung 2.7.1 liege ohne Einschränkung 10_A oberhalb des Stamms. Dieser Knoten hat nach Bemerkung 2.7.2 eine Kante mit Label 7 oder 8 und ist deswegen entweder mit 25_A oder 28_A verbunden. Auch hier ist 25_A der richtige Knoten. Hätten 10_A und 11_A mit 28_A eine gemeinsame Kante, so hätte die Kante zu 11_A Label 22. Wir verwenden, dass das Tensorprodukt $5_A \otimes 11_A$ nicht den Charakter 4_A enthält, d.h. $(5_A \otimes 11_A, 4_A) = 0$. Dies steht im Widerspruch zu

$$28a_{20} \otimes 28a_{22} \equiv 1a_{13},$$

denn der Knoten vom Typ \times an der Kante mit Label 13 ist 4_A , und der müsste vorkommen. Folgende Kanten und Knoten sind für unseren ersten Fall bereits bekannt. Das Label 11 an der Kante zwischen 23_A und 17_A steht fest, da von 17_A keine Kante mehr ausgehen kann, denn diese müsste 17_A mit 5_A oder 6_A verbinden.

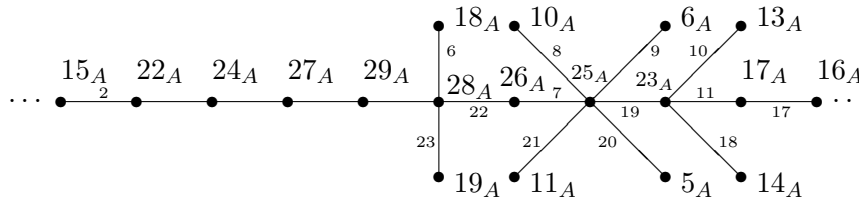


Aufgrund der Labels können wir erkennen, dass entweder am Knoten 25_A oder 23_A noch genau eine Kante nach oben abgehen muss. Nehmen wir an, der Knoten 20_A liege oberhalb des reellen Stamms und sei mit 25_A verbunden. Dann erhalten wir den folgenden Teilbaum.



Damit ist ebenfalls klar, dass 13_A und 14_A nicht mit 20_A und 21_A verbunden sein können. Für diese bleibt nur noch eine gemeinsame Kante mit den Knoten 24_A oder 29_A . Eine gemeinsame Kante von 13_A und 24_A hätte Label 3, was ein Widerspruch zu Bemerkung 2.7.2 (v) ist. Aber auch eine gemeinsame Kante mit 29_A ist nicht möglich. Diese hätte die Nummer 4. Da der Charakter vom Typ \times an der Kante mit Label 18 wieder 25_A ist, verwenden wir wie oben das Tensorprodukt $2_A \otimes 13_A$, um hier zu einem Widerspruch zu gelangen.

Also kann der Knoten 20_A nicht rechts von 6_A liegen, da er dort nur mit 25_A verbunden sein kann, was gerade ausgeschlossen wurde. Das bedeutet, die Knoten 13_A und 14_A sind mit einem Knoten rechts von 25_A verbunden. Hier ist die einzige Möglichkeit der Knoten 23_A , was den folgenden Teilgraphen von Γ_A liefert.



Die beiden Charaktere 20_A und 21_A sind nach Abschnitt 2.5 entweder mit 27_A oder mit 28_A verbunden, was die beiden möglichen Brauer-Bäume für Γ_A in Abbildung 2.5 ergibt.

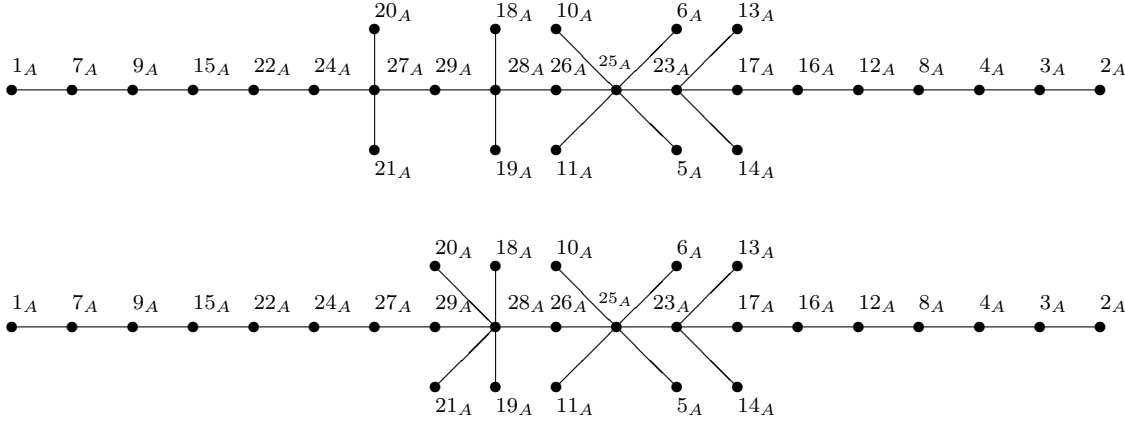
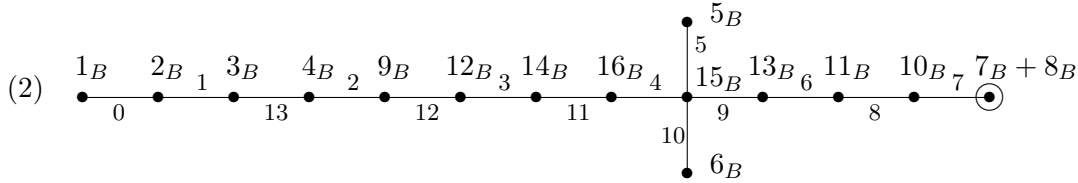


Abbildung 2.5: Die verbleibenden Möglichkeiten für Γ_A im ersten Fall von Γ_B

2.7.2 Die zweite Möglichkeit für Γ_B

Nun nehmen wir für Γ_B die Möglichkeit (2) aus Abschnitt 2.4 als richtig an.



Wie im vorhergehenden Fall beginnen wir mit Vorbetrachtungen.

2.7.3 Bemerkung

(i) Das Tensorprodukt

$$1_B \otimes 5_A \approx_B 5_B$$

liefert uns für eine beliebige Kante, die von 5_A ausgeht und Label x hat, unter Verwendung von

$$1b_0 \otimes 28a_x \equiv 28b_x$$

und des Labels 5 der Kante an 5_B , dass $x \in \{5, 19\}$ ist. Dabei gehen wir wie in Bemerkung 2.7.2 (i) vor. Wie dort können wir auch hier schließen, dass von 5_A genau eine Kante ausgeht, da zwei von diesem Knoten ausgehende Kanten Labels 5 und 19 haben müssten, was nicht möglich ist.

Für eine Kante an 6_A erhalten wir genauso mit

$$1_B \otimes 6_A \approx_B 6_B$$

das Label 10 oder 24. Und auch hier geht von 6_A genau eine Kante aus. Hat also die Kante zu 5_A Label 5, so hat die dazu gespiegelte Kante, die zu 6_A gehört, das Label 24. Hat die Kante zu 5_A allerdings Label 19, so muss die zugehörige Kante an 6_A Label 10 haben.

(ii) Wir wollen nun das Tensorprodukt

$$1_B \otimes 5_B \approx_A 5_A + 18_A$$

verwenden. Deshalb interessiert uns das Produkt ${}_1b_0 \otimes {}_{28}b_5$, welches wir mit Lemma 1.6.5 und dem Ergebnis zu Beginn des Abschnitts 2.7 berechnen.

$$\begin{aligned} {}_1b_0 \otimes {}_{28}b_5 &= {}_1b_0 \otimes ({}_1b_0 \otimes {}_{28}a_5) \\ &= ({}_1b_0 \otimes {}_1b_0) \otimes {}_{28}a_5 \\ &= ({}_1a_0 \oplus {}_1a_{14} \oplus {}_1b_0) \otimes {}_{28}a_5 \\ &= {}_{28}a_5 \oplus {}_{28}a_{19} \oplus {}_{28}b_5 \\ &\approx_a {}_{28}a_5 \oplus {}_{28}a_{19} \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass es eine Kante gibt, die vom Knoten 18_A ausgeht und das Label 5 oder 19 hat. Da 5_A und 18_A nicht verbunden sein können, gilt Folgendes: Ist die einzige Kante zu 5_A mit 5 nummeriert, so besitzt 18_A eine Kante mit Label 19. Hat die Kante zu 5_A jedoch das Label 19, so gibt es eine Kante, die von 18_A ausgeht und das Label 5 hat.

Das Tensorprodukt $1_B \otimes 6_B \approx_A 6_A + 19_A$ führt zum gleichen Ergebnis für die Knoten 6_A und 19_A , allerdings haben die betrachteten Kanten dann Labels 10 bzw. 24.

(iii) Der Punkt (iii) in Bemerkung 2.7.2 gilt hier genauso, d.h. die Kanten die von 10_A und 11_A ausgehen, haben Labels in der Menge $\{7, 8, 21, 22\}$.

(iv) Wir verwenden die Tensorprodukte

$$1_B \otimes 13_A \approx 15_B \text{ und } 1_B \otimes 14_A \approx_B 15_B$$

sowie die Beziehung

$${}_1b_0 \otimes {}_1a_x \equiv {}_1b_x$$

und erhalten mit Argumenten wie in Bemerkung 2.7.2 (v) für eine beliebige Kante mit Label x , die von 13_A bzw. 14_A ausgeht, die Bedingung $x \in \{4, 5, 9, 10, 18, 19, 23, 24\}$.

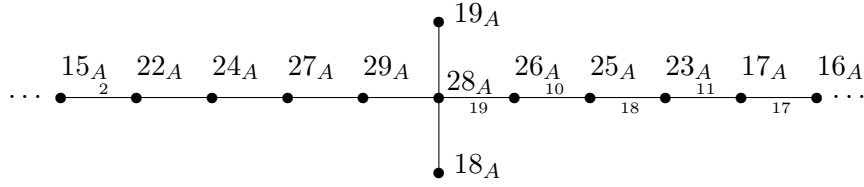
(v) Mit dem Tensorprodukt

$$1_B \otimes 20_A \approx_B 2 \cdot 13_B + 14 \cdot 14_B + 25 \cdot 15_B + 38 \cdot 16_B$$

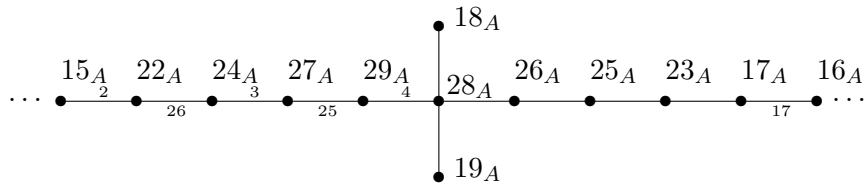
schränken wir die Labels der Kanten zum Knoten 20_A ein. Wie in 2.7.2 (vii) erhalten wir dann für solche Kanten die möglichen Labels $\{4, 6, 9, 11, 18, 20, 23, 25\}$. Die gleiche Bedingung gilt auch für den Knoten 21_A .

Wie bei der ersten Möglichkeit für Γ_B betrachten wir auch hier nach Abschnitt 2.5 zwei Fälle. Entweder ist 18_A mit 27_A oder mit 28_A verbunden. Nehmen wir zunächst an, 18_A habe eine gemeinsame Kante mit 28_A .

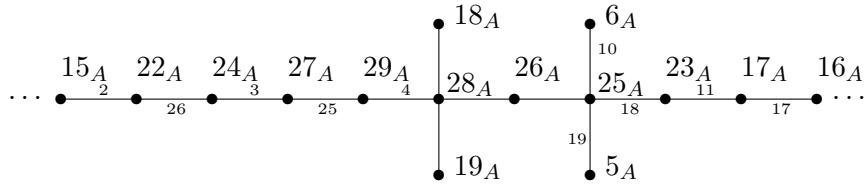
Aus 2.7.3 (ii) folgt, dass es eine Kante gibt, die mit 18_A verbunden ist und das Label 5 oder 19 hat. Liegt also 18_A unterhalb des reellen Stamms, so ist dies eine Kante mit Label 19. Der folgende Baum zeigt jedoch, dass das nicht möglich ist, da 18_A zu weit links am Baum liegt. Man beachte, dass die Kante mit Label 17 bereits festgelegt ist.



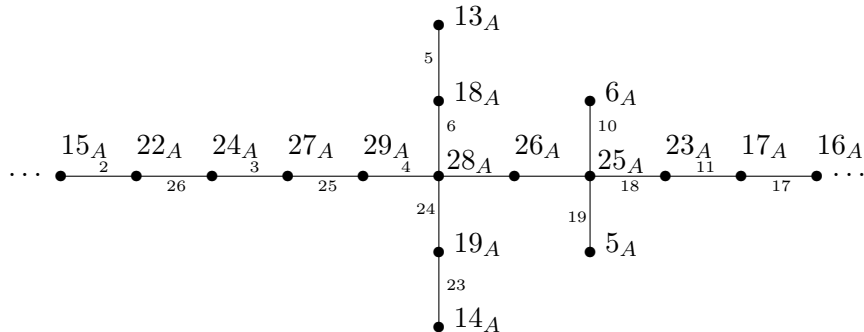
Damit ist klar, dass 18_A oberhalb von S_A liegt und eine Kante mit Label 5 hat. Damit dies möglich ist, darf links von 18_A keine weitere Kante mehr abgehen, was an der folgenden Abbildung deutlich wird. Es ist noch möglich, dass 13_A und 14_A mit 18_A und 19_A verbunden sind.



Nach Bemerkung 2.7.3 (ii) ist die Kante zu 5_A also mit 19 und die zu 6_A mit 10 nummeriert, was bedeutet, dass diese beiden Knoten nicht mit 17_A verbunden sein können. Der Knoten 28_A scheidet ebenfalls aus, da er zu weit links liegt. Nehmen wir an 5_A und 6_A seien mit 25_A verbunden. Dann kann rechts von 6_A keine Kante mehr abgehen und die folgenden Labels stehen fest.



Kümmern wir uns um die Positionen von 13_A und 14_A . Es sei 13_A der Knoten, der oberhalb des reellen Stamms liegt. Nach 2.7.3 (iv) bleiben für eine Kante, die von 13_A ausgeht, nur noch die Nummern 5 und 9. Die möglichen Knoten, mit denen 13_A verbunden sein kann, sind nach Abschnitt 2.5 18_A , 19_A , 20_A , 21_A und 26_A . Am Knoten 26_A kann das Label weder 5 noch 9 sein, d.h. dieser scheidet aus. Nehmen wir an, 13_A habe eine gemeinsame Kante mit 18_A .



Nun können wir diesen Teilbaum mit dem Tensorprodukt

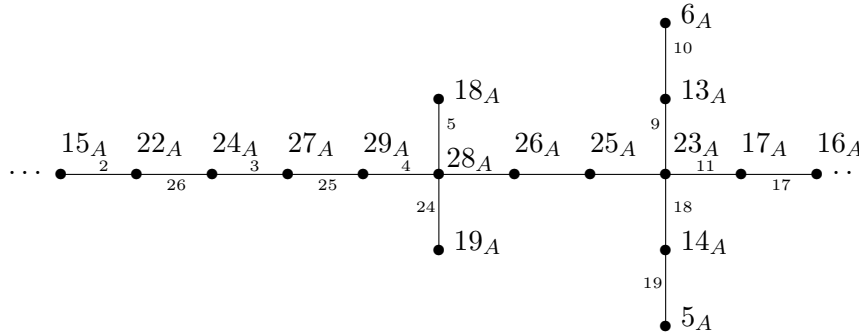
$$2_A \otimes 13_A \approx_A 14_A + 23_A + 24_A + 5 \cdot 26_A + 9 \cdot 27_A + 22 \cdot 28_A + 24 \cdot 29_A$$

ausschließen, denn nach

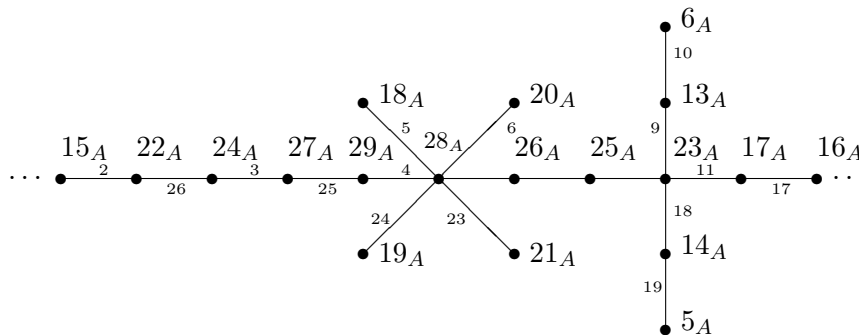
$$1a_{14} \otimes 1a_5 \equiv 1a_{19}$$

müsste der Knoten vom Typ \times an der Kante mit Nummer 19 vorkommen. Da dies der Knoten 25_A ist, erhalten wir einen Widerspruch. Damit folgt, dass 13_A und 14_A mit 20_A und 21_A verbunden sind. Für den Knoten 20_A bleiben nur die möglichen Partner 25_A und 28_A . In beiden Fällen hat die Kante zu 13_A jedoch nicht Label 9, was nach 2.7.3 (iv) erfüllt sein müsste.

Die gemeinsame Kante von 5_A und 25_A kann also nicht richtig sein. Um die verlangten Labels zu erhalten, haben wir für 5_A nur noch die folgende Möglichkeit.

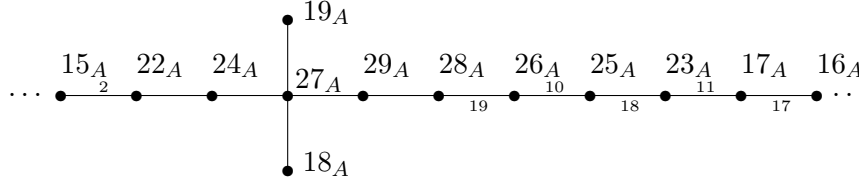


Der Knoten 20_A kann nach 2.7.3 (v) nur noch eine Kante mit Label 6 haben und muss deswegen mit dem Knoten 28_A verbunden sein.

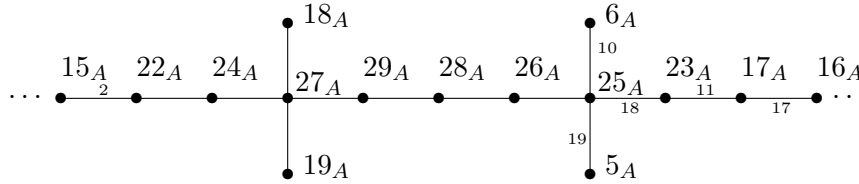


Das verbleibende Paar 10_A und 11_A kann nun entweder mit 25_A oder mit 28_A verbunden sein. So erhalten wir die beiden ersten Möglichkeiten in Abbildung 2.6.

Nehmen wir nun an, dass 18_A mit 27_A verbunden ist. Wir wissen aus Bemerkung 2.7.3 (ii), dass von 18_A eine Kante abgeht, welche das Label 5 oder 19 hat. Wenn wir annehmen, 18_A liege unterhalb des reellen Stamms, dann muss es also eine Kante mit Label 19 sein. Betrachten wir den folgenden Teilbaum, so sehen wir, dass dies nicht möglich ist, da die Kante mit Label 17 schon feststeht.

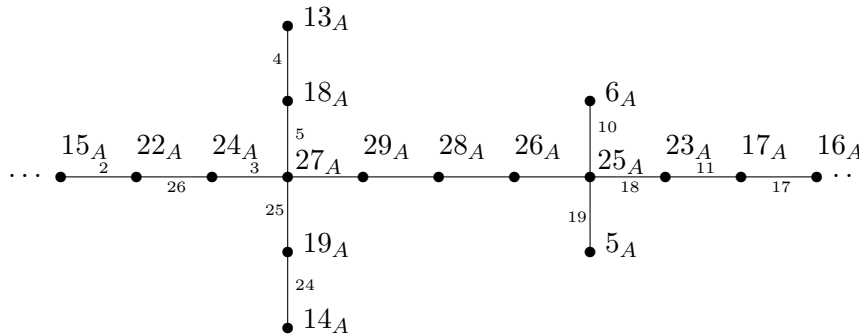


Also folgt, dass 18_A oberhalb des reellen Stamms liegt und eine Kante besitzt, die das Label 5 hat. Damit wissen wir nach 2.7.3 (i), dass die einzige von 5_A ausgehende Kante Label 19 und die von 6_A ausgehende Label 10 hat. Deswegen können 5_A und 6_A nicht mit dem Knoten 17_A verbunden sein, da die Labels dann 11 und 18 wären. Wir nehmen wieder an, 5_A sei mit 25_A verbunden. Dann kann wie oben bereits erläutert rechts von 5_A keine Kante mehr abgehen und wir haben den folgenden Teilgraphen.



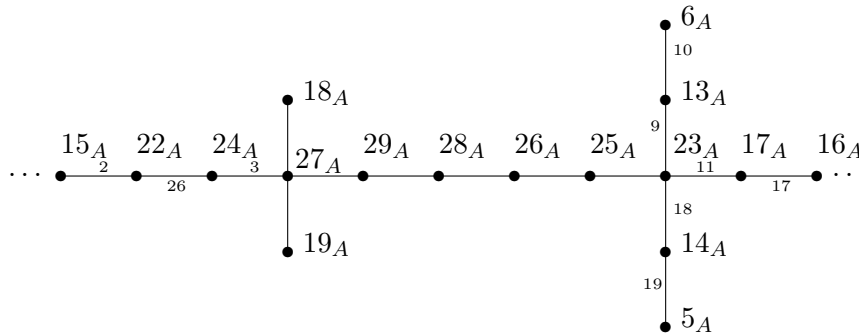
Wiederum sehen wir uns die möglichen Knoten an, mit denen 13_A verbunden sein kann. Dies sind die Charaktere 18_A , 20_A , 24_A , 29_A und 26_A , wenn wir bereits annehmen, dass 13_A und 20_A oberhalb des reellen Stamms liegen. Wir zeigen nun, dass jedoch keiner dieser Knoten in Frage kommt und wir deswegen eine gemeinsame Kante von 5_A und 25_A ausschließen müssen.

Betrachten wir den Knoten 26_A . Wäre 13_A mit diesem verbunden, so könnte die verbindende Kante nicht das Label 4, 5 oder 9 haben. Nach 2.7.3 (iv) können wir 26_A ausschließen. Am Knoten 24_A hätte die Kante zu 13_A das Label 3, da die Knoten 10_A bzw. 20_A nach Abschnitt 2.5 und 2.7.3 (iii) nicht mit 22_A verbunden sind. Dies ist ein Widerspruch zu 2.7.3 (iv), womit auch 24_A wegfällt. Nehmen wir nun an, 13_A sei mit 29_A verbunden. Das Label der Kante zwischen den beiden Knoten kann auch hier nicht 4, 5 oder 9 sein. Also geht auch dies nicht. Es bleiben noch die möglichen Partner 18_A und 20_A für 13_A . Nehmen wir zunächst 18_A . Nach 2.7.3 (iv) muss das Label der Kante zwischen 13_A und 18_A 4 sein, d.h. 20_A ist nicht links von 18_A mit 27_A verbunden.

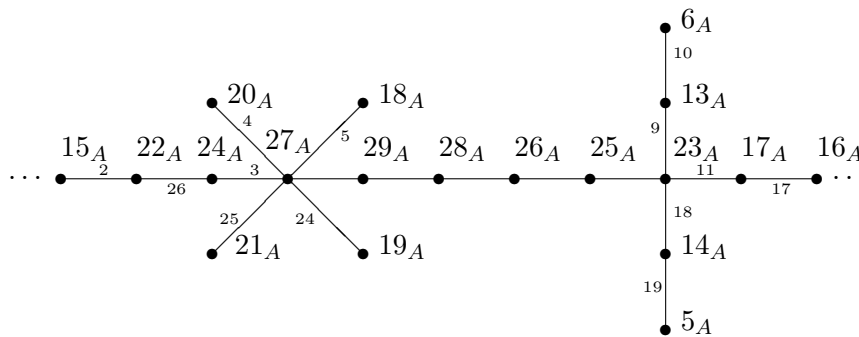


Das Label 4 schließen wir jedoch mit dem Tensorprodukt $2_A \otimes 13_A$ und der Rechnung $1a_{14} \otimes 1a_4 \equiv 1a_{18}$, wie oben bereits verwendet, aus, denn auch hier ist der Knoten vom

Typ \times an der Kante mit Label 18 der Knoten 25_A , der im verwendeten Produkt nicht vorkommt. Schließlich bleibt noch der Fall einer gemeinsamen Kante von 13_A und 20_A . Mit dieser Konstellation und unter Berücksichtigung der Tatsache, dass der Knoten 10_A rechts von 18_A sitzt, sehen wir, dass es unmöglich ist, für 18_A eine Kante mit Label 5 zu erhalten. Damit ist für die Knoten 5_A und 6_A nur noch die folgende Anordnung möglich.



Die Labels 3 und 26 sind eingetragen, da mit den Knoten 22_A und 24_A kein anderer Knoten mehr verbunden sein kann. Damit nun 18_A eine Kante mit Label 5 erhält, müssen 20_A und 21_A auch mit 27_A verbunden sein und zwar wie folgt.



Nun fehlt nur noch das Paar 10_A und 11_A , dessen Labels in 2.7.3 (iii) angegeben sind. Diese beiden Knoten können also nur noch mit 25_A oder 28_A verbunden sein. Wir erhalten die letzten beiden Möglichkeiten in Abbildung 2.6.

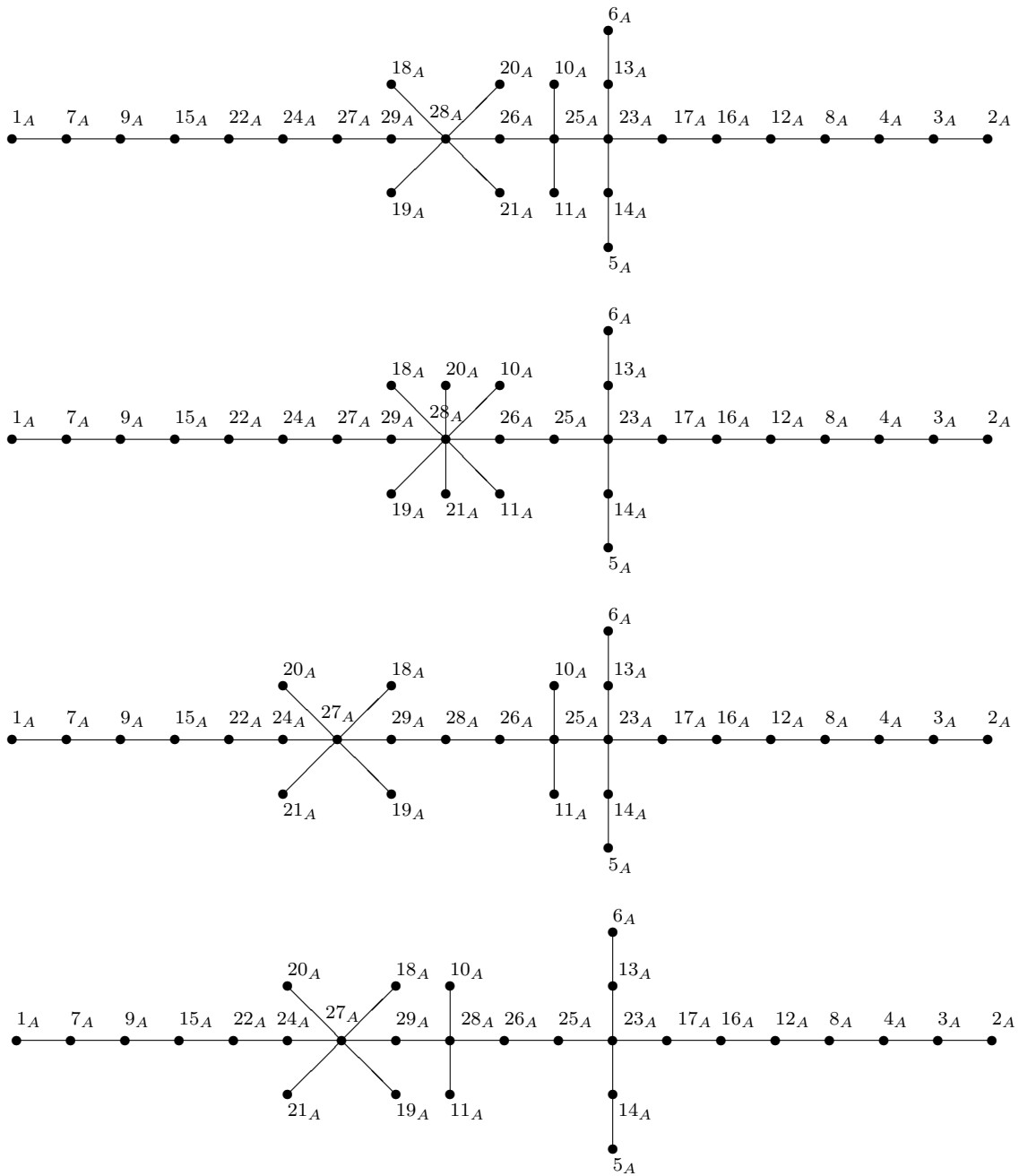
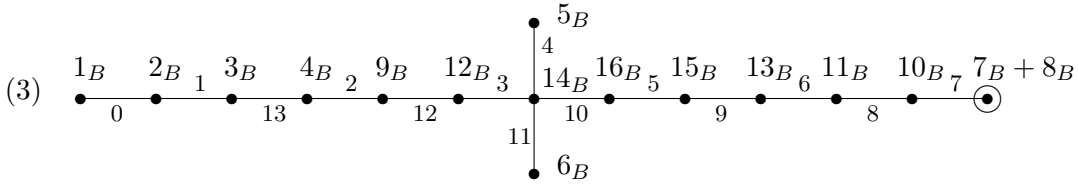


Abbildung 2.6: Die verbleibenden Möglichkeiten für Γ_A im zweiten Fall für Γ_B

2.7.3 Die dritte Möglichkeit für Γ_B

Kommen wir zum letzten der drei Fälle für den Brauer-Baum Γ_B von B , der Möglichkeit (3) aus Abschnitt 2.4.



In der anschließenden Bemerkung sammeln wir wieder einige Bedingungen für die Labels gewisser Kanten.

2.7.4 Bemerkung

(i) Mithilfe der Tensorprodukte

$$1_B \otimes 5_A \approx_B 5_B \text{ und } 1_B \otimes 6_A \approx_B 6_B$$

sowie unter Verwendung von

$$1b_0 \otimes 28a_x \equiv 28b_x$$

erhalten wir das folgende Ergebnis. Da die Kante zum Knoten 5_B im Brauer-Baum Γ_B Label 4 hat, ist das Label einer Kante, die von 5_A ausgeht, entweder 4 oder 18. Die dazu gespiegelte Kante an 6_A hat dann Label 25 bzw. 11. Wie in den entsprechenden Unterpunkten von Bemerkung 2.7.2 und 2.7.3 gehen auch hier von 5_A und 6_A je genau eine Kante aus.

(ii) Wie in Bemerkung 2.7.3 (ii) liefern uns die Produkte

$$1_B \otimes 5_B \approx_A 5_A + 18_A \text{ und } 1_B \otimes 6_B \approx_A 6_A + 19_A,$$

dass von 18_A eine Kante ausgeht, die Label 4 oder 18 hat. Der Knoten 19_A besitzt eine Kante mit Label 11 oder 25.

(iii) Auch in diesem Fall gilt Bemerkung 2.7.2 (iii) bzw. 2.7.3 (iii) genauso. Wir erhalten für eine beliebige Kante, die vom Knoten 10_A oder 11_A ausgeht und das Label x hat, die Bedingung $x \in \{7, 8, 21, 22\}$.

(iv) Da von 15_B in diesem Fall wieder nur zwei Kanten mit Labels 5 und 9 ausgehen, schränken wir die Labels für Kanten zu 13_A und 14_A mit

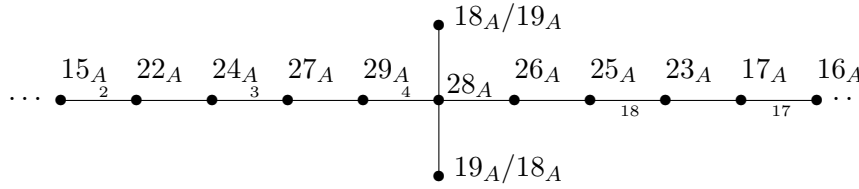
$$1_B \otimes 13_A \approx_B 15_B \text{ und } 1_B \otimes 14_B \approx_B 15_B$$

auf die Menge $\{5, 9, 19, 23\}$ ein (vergleiche 2.7.2 (v) und 2.7.3 (iv)).

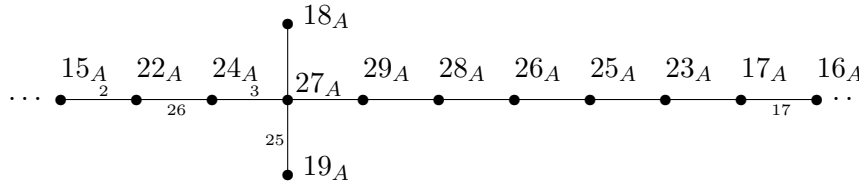
(v) In Bezug auf den Zusammenhang der Labels der Kanten am Knoten 10_A bzw. 11_A und der Labels am Knoten 26_A gilt Bemerkung 2.7.2 (vi) in diesem Fall genauso.

(vi) Auch in Bezug auf die Kanten zu den Knoten 20_A und 21_A gehen wir wie in Bemerkung 2.7.2 (vii) und 2.7.3 (v) vor und schränken die Labels auf die Menge $\{5,6,9,10,19,20,23,24\}$ ein.

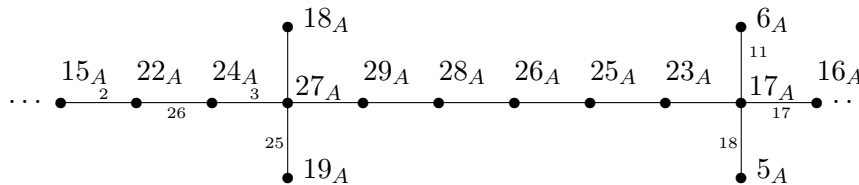
Wieder unterscheiden wir die möglichen Knoten, mit denen 18_A verbunden ist. Dies sind 27_A oder 28_A . Angenommen, 18_A sei mit dem Knoten 28_A verbunden. Dann kann es keine Kante geben, die von 18_A ausgeht und das Label 4 oder 18 hat, wie in der folgenden Abbildung angedeutet ist.



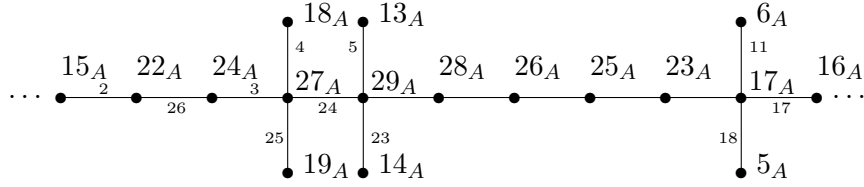
Damit ist klar, dass 18_A mit 27_A verbunden ist. Ausserdem muss 18_A oberhalb des reellen Stamms liegen, da der Knoten sonst für eine Kante mit Label 18 zu weit links am Stamm liegt. Wir haben also die folgende Situation, wobei die eingezeichneten Labels schon festliegen, denn andernfalls könnte von 18_A keine Kante vom Label 4 ausgehen.



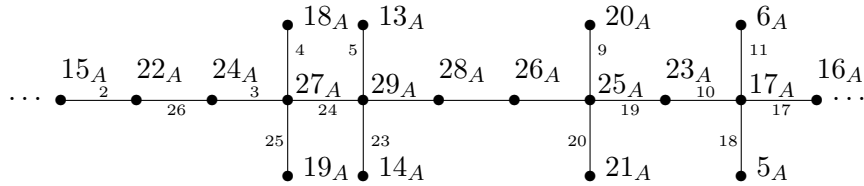
Nach Bemerkung 2.7.4 (i) und (ii) ergibt sich für die Kante zu 5_A das Label 18 und für die zum Knoten 6_A das Label 11. Dies bedeutet, 5_A und 6_A sind mit dem Knoten 17_A verbunden, da andernfalls diese Labels nicht erreicht werden, denn die einzigen Knoten, die mit 17_A verbunden sein können, sind ja 5_A und 6_A .



Wenden wir uns den Knoten 13_A und 14_A zu. Wir nehmen nach Bemerkung 2.7.1 an, dass der Knoten 13_A oberhalb des reellen Stamms liegt, und dass eine von diesem Knoten ausgehende Kante nach Bemerkung 2.7.4 (iv) das Label 5 oder 9 hat. Da dies bei einer gemeinsamen Kante mit 26_A nicht möglich ist, bleiben für 13_A die möglichen Partner 18_A , 20_A , 23_A und 29_A . Nehmen wir zunächst an, 13_A habe eine gemeinsame Kante mit 29_A .



Es bleiben nur noch die beiden Knoten 28_A und 25_A , mit denen die Paare $10_A/11_A$ und $20_A/21_A$ verbunden sein können. Nach Bemerkung 2.7.4 (vi) bleibt für eine Kante zu 20_A , wenn wir annehmen, dass dieser Knoten oberhalb des Stamms liegt, nur noch das Label 9, was bedeutet, dass 20_A mit 25_A verbunden ist und 10_A nicht rechts von 20_A liegt.



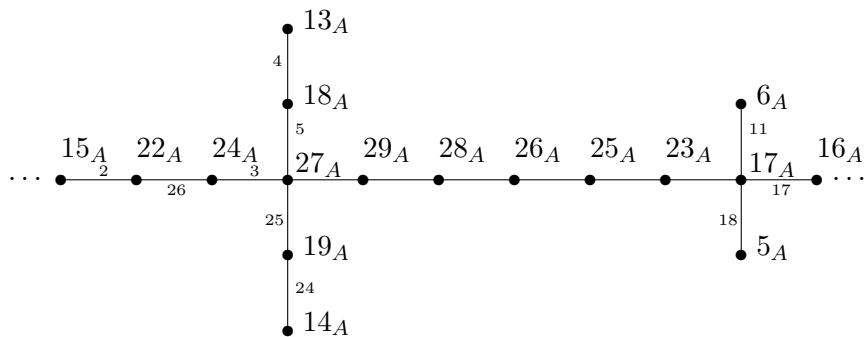
Mithilfe des folgenden Tensorprodukts können wir diese Möglichkeit jedoch ausschließen. Es gilt

$$2_A \otimes 13_A \approx_A 14_A + 23_A + 24_A + 5 \cdot 26_A + 9 \cdot 27_A + 22 \cdot 28_A + 24 \cdot 29_A.$$

Da die Kante am Knoten 13_A Label 5 hat, folgt mit

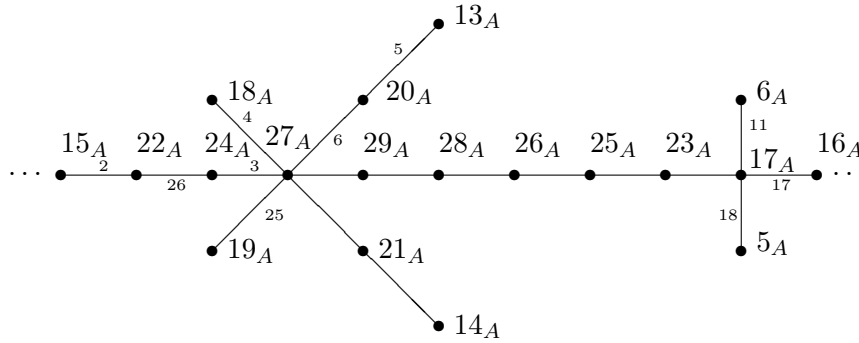
$$1a_{14} \otimes 1a_5 \equiv 1a_{19},$$

dass der Knoten 25_A im obigen Tensorprodukt vorkommen muss, da dieser der Knoten vom Typ \times an der Kante mit Label 19 ist, was einen Widerspruch ergibt. Nehmen wir nun an, 13_A habe eine gemeinsame Kante mit 18_A . Dies würde den folgenden Teilbaum ergeben.

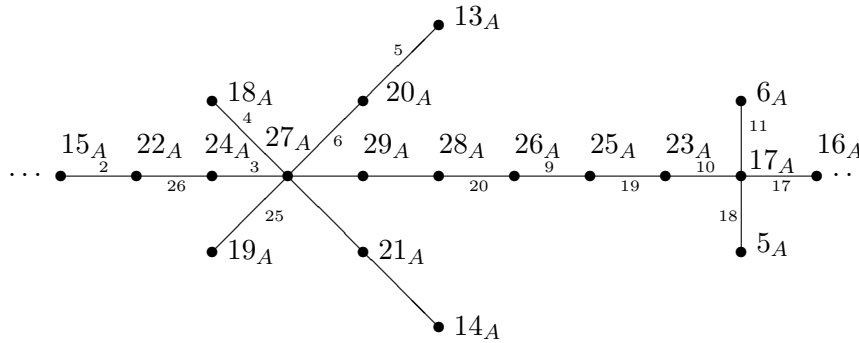


Die Nummer 24 an der Kante zwischen 14_A und 19_A ist jedoch ein Widerspruch zu 2.7.4 (iv). Also scheidet auch diese Möglichkeit aus.

Betrachten wir nun den Knoten 20_A als möglichen Partner von 13_A . Dieser wiederum kann verbunden sein mit 27_A , 28_A oder 25_A . Alle drei Knoten kommen jedoch nicht in Frage, wie wir jetzt sehen werden. Die erste Möglichkeit ist eine gemeinsame Kante mit 27_A . Die Kanten, die von 20_A ausgehen, haben dann Labels 5 und 6 nach 2.7.4 (vi).



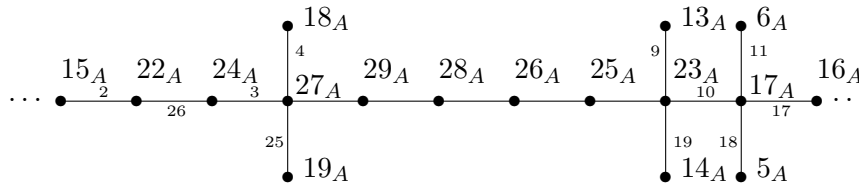
Wenn wir den Knoten 10_A oberhalb des reellen Stamms wählen, so haben die Kanten zu diesem nach 2.7.4 (iii) Label 7 oder 8, was bedeutet, dass dieser Knoten nicht mit 25_A verbunden sein kann. Es bleiben nur noch die Knoten 27_A und 28_A als mögliche Partner, wodurch die Labels der Kanten am Knoten 26_A festgelegt sind.



Dies ergibt einen Widerspruch zu 2.7.4 (v), denn die Kanten am Knoten 26_A sollten Labels haben, die in der Menge $\{7, 8, 21, 22\}$ liegen.

Eine Verbindung von 20_A und 28_A führt dazu, dass die Kanten zu 20_A Labels haben, die nicht in der Menge aus Bemerkung 2.7.4 (vi) liegen. Diese Anordnung scheidet also auch aus. Bleibt noch die Möglichkeit einer gemeinsamen Kante von 20_A und 25_A . Hier muss 10_A links von 20_A liegen. Wieder kommen nicht zulässige Labels bei den Kanten von 20_A vor.

Also steht fest, dass die Knoten 13_A und 14_A mit dem Knoten 23_A verbunden sind. Die Situation stellt sich folgendermaßen dar.



Da die Kante zu 10_A nach 2.7.4 (iii) Label 7 oder 8 hat, kann 10_A nur mit den Knoten 25_A oder 28_A verbunden sein. Im ersten Fall bleiben dann die ersten beiden Brauer-Bäume in Abbildung 2.7 für Γ_A , da für Kanten am Knoten 20_A nur noch die Labels 5 oder 6 in Frage kommen.

Ist jedoch 10_A mit 28_A verbunden, so bleiben für eine Kante mit 20_A aufgrund der Nummerierung wieder nur die Knoten 27_A und 28_A . Das ergibt die anderen beiden Brauer-Bäume in Abbildung 2.7.

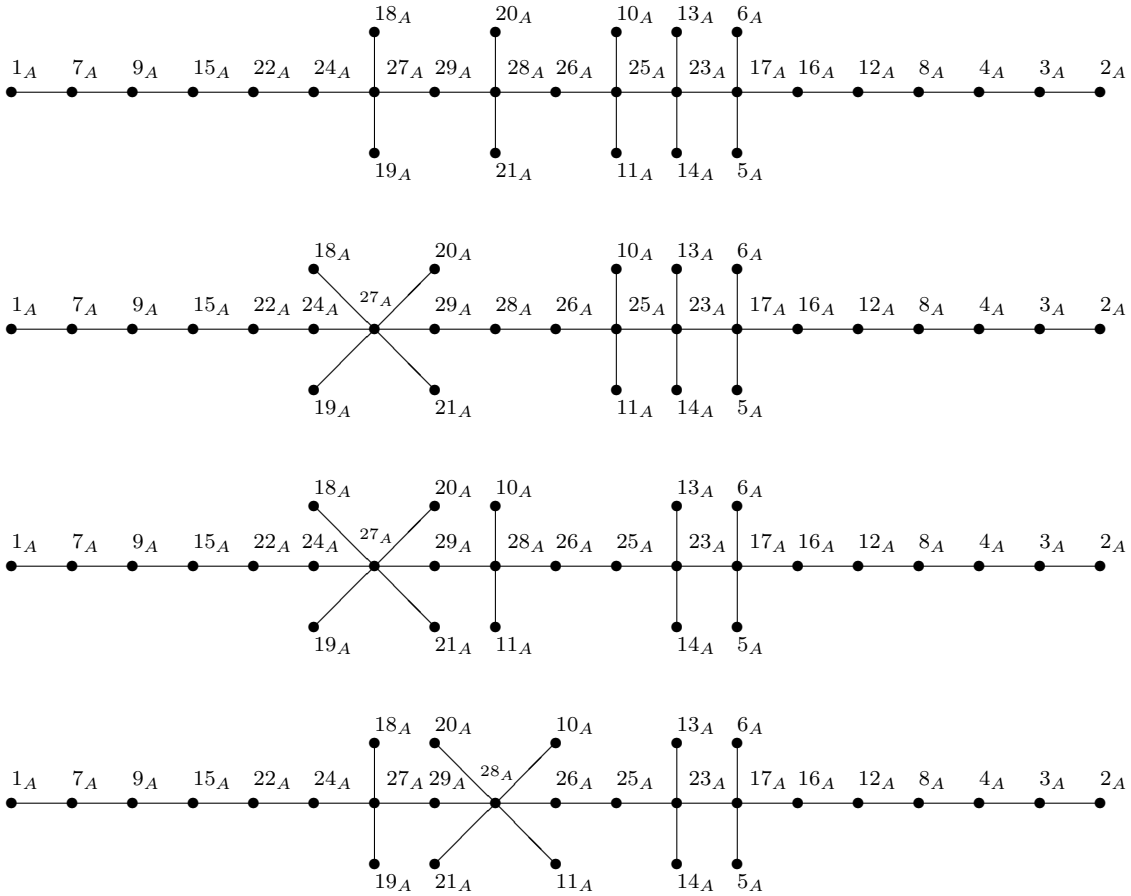


Abbildung 2.7: Die verbleibenden Möglichkeiten für Γ_A im dritten Fall für Γ_B

2.8 Bewertung

Es bleiben insgesamt zehn Möglichkeiten, wie die Brauer-Bäume von M in Charakteristik 29 aussehen können. Dies sind zwei mögliche Bäume für Γ_A , falls der Brauer-Baum Γ_B von B die Gestalt (1) hat, vier mögliche Brauer-Bäume, falls Γ_B die Gestalt (2) hat und vier mögliche Bäume, falls Γ_B von der Form (3) ist. Diese Fälle noch weiter zu reduzieren, ist mir leider nicht gelungen.

Die Suche nach weiteren projektiven Charakteren, aus denen sich direkte Informationen über mögliche Kanten des Brauer-Baums gewinnen lassen, war nicht von Erfolg gekrönt. Es wurden Defekt-0-Charaktere von den Untergruppen $3.Fi_{24}$ und B (Babymonster) nach M induziert. Doch die induzierten Charaktere enthalten meist sehr viele Konstituenten mit großer Vielfachheit, so dass eine Auswertung „von Hand“ fast unmöglich ist. Natürlich gibt es keine Garantie, dass nicht doch Charaktere übersehen wurden, die zu einer weiteren Einschränkung der möglichen Brauer-Bäume geführt hätten. Um dies gänzlich auszuschließen, müsste man die Auswahl der nützlichen Charaktere mit einem geeigneten Programm durchführen.

Auch bei der Anwendung der Green-Korrespondenz war die Suche nach weiteren brauchbaren Tensorprodukten nicht erfolgreich. Wiederum waren zu viele Konstituenten mit zu großer Vielfachheit enthalten. Bei den hier verwendeten Tensorprodukten mit den Charakteren 20_A und 21_A lässt sich dieses Problem erahnen. Mit solchen Produkten lassen sich auf Basis der Green-Korrespondenz mit den hier vorgestellten Methoden keine Aussagen treffen. Wie bei der Auswahl der projektiven Charaktere ist es durchaus möglich, dass Tensorprodukte übersehen wurden, die zu weiteren Ergebnissen geführt hätten.

2.9 Tensorprodukte

Die hier abgedruckten Tabellen enthalten die Tensorprodukte, die bei der Anwendung der Green-Korrespondenz verwendet werden. Es kommen aber auch Produkte vor, die anfänglich betrachtet worden sind, allerdings keine neuen Informationen mehr ergeben und deshalb bei der Berechnung der Brauer-Bäume nicht gebraucht werden. Sie sind trotzdem aufgeführt, da sie die erhaltenen Ergebnisse noch zusätzlich stützen.

	1_B	2_B	3_B	4_B	5_B	6_B	7_B	8_B	9_B	10_B	11_B	12_B	13_B	14_B	15_B	16_B
cc	r	r	r	r	6_B	5_B	8_B	7_B	r	r	r	r	r	r	r	r
\times/\circ	\times	\circ	\times	\circ	\circ	\circ	\times	\times	\times	\circ	\times	\circ	\circ	\times	\times	\circ
$1_B \otimes 1_B$	1															
$1_B \otimes 5_A$					1											
$1_B \otimes 6_A$						1										
$1_B \otimes 10_A$										1						
$1_B \otimes 11_A$										1						
$1_B \otimes 5_B$					1											
$1_B \otimes 6_B$						1										
$1_B \otimes 13_A$															1	
$1_B \otimes 14_A$															1	
$1_B \otimes 18_A$					1								1	1	11	11
$1_B \otimes 19_A$						1							1	1	11	11
$1_B \otimes 20_A$													2	14	25	38
$1_B \otimes 21_A$													2	14	25	38
$2_A \otimes 2_A$	1	1														
$2_A \otimes 5_A$																
$2_A \otimes 6_A$																
$2_A \otimes 10_A$														1		1
$2_A \otimes 11_A$														1		1
$2_A \otimes 5_B$					1								1	1	11	11
$2_A \otimes 6_B$						1							1	1	11	11
$2_A \otimes 13_A$													2	5	25	28
$2_A \otimes 14_A$													2	5	25	28
$2_A \otimes 18_A$					1						18	9	53	395	866	1216
$2_A \otimes 19_A$						1					18	9	53	395	866	1216
$2_A \otimes 20_A$							1	1	1	4	67	65	165	1474	2689	3998
$2_A \otimes 21_A$							1	1	1	4	67	65	165	1474	2689	3998

Tabelle 2.7: Tensorprodukte zerlegt in B

	1_A	2_A	3_A	4_A	5_A	6_A	7_A	8_A	9_A	10_A	11_A	12_A	13_A	14_A	15_A
cc	r	r	r	r	6_A	5_A	r	r	r	11_A	10_A	r	14_A	13_A	r
\times/\circ	\times	\times	\circ	\times	\circ	\circ	\circ	\circ	\times	\circ	\circ	\times	\times	\times	\circ
$1_B \otimes 1_B$	1	1													
$1_B \otimes 5_A$															
$1_B \otimes 6_A$															
$1_B \otimes 10_A$															
$1_B \otimes 11_A$															
$1_B \otimes 5_B$					1										
$1_B \otimes 6_B$						1									
$1_B \otimes 13_A$															
$1_B \otimes 14_A$															
$1_B \otimes 18_A$															
$1_B \otimes 19_A$															
$1_B \otimes 20_A$															
$1_B \otimes 21_A$															
$2_A \otimes 2_A$	1	1	1												
$2_A \otimes 5_A$															
$2_A \otimes 6_A$															
$2_A \otimes 10_A$															
$2_A \otimes 11_A$															
$2_A \otimes 5_B$															
$2_A \otimes 6_B$															
$2_A \otimes 13_A$														1	
$2_A \otimes 14_A$													1		
$2_A \otimes 18_A$					1										
$2_A \otimes 19_A$						1									
$2_A \otimes 20_A$															
$2_A \otimes 21_A$															

Tabelle 2.8: Tensorprodukte zerlegt in A

	16_A	17_A	18_A	19_A	20_A	21_A	22_A	23_A	24_A	25_A	26_A	27_A	28_A	29_A
cc	r	r	19_A	18_A	21_A	20_A	r	r	r	r	r	r	r	r
\times/\circ	\circ	\times	\circ	\circ	\circ	\circ	\times	\circ	\circ	\times	\circ	\times	\times	\circ
$1_B \otimes 1_B$														
$1_B \otimes 5_A$														
$1_B \otimes 6_A$														
$1_B \otimes 10_A$														
$1_B \otimes 11_A$														
$1_B \otimes 5_B$			1											
$1_B \otimes 6_B$				1										
$1_B \otimes 13_A$													1	1
$1_B \otimes 14_A$													1	1
$1_B \otimes 18_A$			1								1	3	9	10
$1_B \otimes 19_A$				1							1	3	9	10
$1_B \otimes 20_A$					1	1		1	2	3	7	10	19	20
$1_B \otimes 21_A$					1	1		1	2	3	7	10	19	20
$2_A \otimes 2_A$														
$2_A \otimes 5_A$			1											
$2_A \otimes 6_A$				1										
$2_A \otimes 10_A$											1			
$2_A \otimes 11_A$											1			
$2_A \otimes 5_B$			1								1	3	9	10
$2_A \otimes 6_B$				1							1	3	9	10
$2_A \otimes 13_A$								1	1		5	9	22	24
$2_A \otimes 14_A$								1	1		5	9	22	24
$2_A \otimes 18_A$			4	3	2	2	1	31	53	92	238	324	682	766
$2_A \otimes 19_A$			3	4	2	2	1	31	53	92	238	324	682	766
$2_A \otimes 20_A$		1	2	2	12	12	22	149	240	398	835	1064	2059	2293
$2_A \otimes 21_A$		1	2	2	12	12	22	149	240	398	835	1064	2059	2293

Tabelle 2.9: Tensorprodukte zerlegt in A

Literaturverzeichnis

- [Alp] J.L. Alperin, *Local representation theory*, Cambridge University Press, 1. Paperback edition, New York 1993.
- [Atl] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson, *Atlas of finite groups*, Oxford University Press, Oxford 1985.
- [Fei] W. Feit, *The representation theory of finite groups*, North Holland, Amsterdam 1982.
- [BBB] G. Hiß, K. Lux, *Brauer trees of sporadic groups*, Oxford University Press, Oxford 1989.
- [KSt] H. Kurzweil, B. Stellmacher, *Theorie der endlichen Gruppen*, Springer, Berlin 1998.