6. Übung Codes und Invariantentheorie

Prof. Dr. G. Nebe **(WS 22/23)**

Aufgabe 10. Voraussetzungen wie bei Aufgabe 8. Sei zusätzlich $\rho := (V, \rho_M, \rho_\Phi, \beta)$ eine (für (iii) endliche) Darstellung von (R, M, ψ, Φ). Zeigen Sie, daß für alle $r \in R$, $x, y \in V$ gilt:

(i) $\beta(y, rx) = \beta(x, r^J \epsilon y)$ insbesondere $\beta(y, x) = \beta(x, \epsilon y)$

(ii) $\beta(rx, y) = \beta(x, r^J y)$

(iii) Ist $e = u_e v_e$ ein symmetrisches Idempotent in R, so gilt

$$h_{e,u_e,v_e}^{-1} = h_{e,-\epsilon^{-1}u_e^J,-v_e^J\epsilon}.$$

Aufgabe 11. (Skalare Elemente in der Clifford-Weil Gruppe) Sei e ein symmetrisches Idempotent, $\phi \in \Phi$.

(i) Das Element

$$H_{e,u_e,v_e}\, d((1,\phi)) \;=\; \left(\begin{pmatrix} 1-e^J & v_e \\ -u_e & 1-2e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\psi(\epsilon e) \\ & -\phi[-1] \end{pmatrix} \right)$$

der hyperbolischen co-unitären Gruppe hat Ordnung 3.

(ii) $(h_{e,u_e,v_e}\, d_\phi)^3 \in \mathcal{C}(\rho)$ operiert als Skalarmultiplikation mit

$$\gamma_\rho(\phi) \;:=\; |eV|^{-1/2} \sum_{v \in eV} \exp(2\pi i \rho_\Phi(\phi)(v)) \;.$$

(Benutzen Sie Satz 6.14, dass die offensichtliche Abbildung von $\mathcal{U}(R,\Phi)$ nach $\mathcal{C}(\rho)$ eine projektive Darstellung ist.)

(iii) Sei $q = p^f \equiv 3 \pmod 4$ und $R(q^E) := (R, M, \psi, \Phi) = (\mathbf{F}_q, \mathbf{F}_q, \mathrm{id}, \mathbf{F}_q)$ der Form Ring mit $\tau :=$ id, $\{\!\!\}$:= id und $\lambda :=$ id und $\rho(q^E) := (V, \rho_M, \rho_\Phi, \beta)$ die Darstellung von $R(q^E)$ mit $V = \mathbf{F}_q$,

$$\rho_M(a)(x,y) = \frac{1}{p}\mathrm{Tr}(axy)$$

für alle $a \in M = \mathbf{F}_q$, $x, y \in V = \mathbf{F}_q$ wo Tr die Spur von $\mathbf{F}_q$ nach $\mathbf{F}_p$ bezeichnet.

Berechnen Sie $\gamma_\rho(\phi)$ aus (ii) für den Fall $e =$diag$(1, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{F}_q^{n\times n}$ $\phi =$diag$(u, 0, \ldots, 0)$ wo $u \in \mathbf{F}_q$ mit $\mathrm{Tr}(u) = 1$.

Folgern Sie, dass die Länge eines selbstdualen Codes über $\mathbf{F}_q$ durch 4 teilbar ist, wenn $q \equiv 3 \pmod 4$.