(6.7) Satz: $e \in R$ sym. Idempot., $e = u_e v_e$, $u_e \in eRe^\partial$, $v_e \in e^\partial R e$, $e^\partial = v_e u_e$

Dann ist

$$h := H_{e,u_e,v_e} := \left(\begin{pmatrix} 1-e^\partial & v_e \\ -\varepsilon^{-1} u_e^\partial & 1-e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \psi(-\varepsilon e) \\ & 0 \end{pmatrix} \right)$$

in $\mathcal{U}(R,\Phi)$ $\qquad (\varepsilon = \psi^{-1}(\tau(\psi(1))))$

Bew: Zeigen

$$\begin{pmatrix} c^\partial a & c^\partial b \\ d^\partial a - 1 & d^\partial b\end{pmatrix} = \psi_2^{-1}\begin{pmatrix}\lambda(\phi_1) & m \\ \tau(m) & \lambda(\phi_2)\end{pmatrix}.$$

R.S.: $\psi_2^{-1}\begin{pmatrix}0 & \psi(-\varepsilon e)\\ \tau(\psi(-\varepsilon e)) & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon e \\ -e^\partial \underbrace{\varepsilon^\partial \varepsilon}_{=1} & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -\varepsilon e\\ -e^\partial & 0\end{pmatrix}$

$c^\partial a$: $(-\varepsilon^{-1}u_e^\partial)^\partial (1-e^\partial) = -u_e^{\partial^2} \underbrace{\varepsilon^{-\partial}}_{\varepsilon}(1-e^\partial)$

$= -\varepsilon u_e \varepsilon^{-1}\varepsilon (1-e^\partial) = -\varepsilon \underbrace{u_e}_{\in eRe^\partial \Rightarrow u_e e^\partial = u_e}(1-e^\partial) = 0$

$d^\partial b$: $(1-e)^\partial \cdot v_e = (1-e^\partial)\cdot v_e = 0$ da $v_e \in e^\partial R e$

$c^\partial b$: $(-\varepsilon^{-1}u_e^\partial)^\partial \cdot v_e = -u_e^{\partial^2}\varepsilon^{-\partial} v_e = -\varepsilon u_e \varepsilon^{-1}\cdot\varepsilon v_e = -\varepsilon u_e v_e$
$= -\varepsilon e.$

$d^\partial a - 1$: $(1-e)^\partial(1-e^\partial) - 1 = (1-e^\partial) - 1 = -e^\partial.$

$\boxed{\text{(6.8) Satz}}$

~~Ziel~~: R endlich $\Rightarrow$

$$\mathcal{U}(R,\Phi) = \langle d(P(R,\Phi)),\ H_{e,u_e,v_e} \mid e \in R \text{ sym. Idempot.}\rangle =: \mathcal{G}$$

Wissen schon: $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{U}(R,\Phi)$

Andere Richtung: Viel Rechnerei $\rightsquigarrow$ Buch.

Weiter mit 6.14 / U5

(6.14) Satz ~~Die A~~ Vor. wie bei ~~(6.10)~~ (6.8), ϱ endl. Darst von (R,Φ) 15

Die Abb. $\varrho : \mathcal{U}(R,\Phi) \to \mathcal{C}(\varrho)$

$$\varrho(d(r,\phi)) := m_r \cdot d_\phi$$

$$\varrho(H_{e,u_e,v_e}) := h_{e,u_e,v_e}$$

definiert eine projektive Darstellung von $\mathcal{U}(R,\Phi)$

d.h. $\bar{\varrho} : \mathcal{U}(R,\Phi) \to GL_{|V|}(\mathbb{C}) / \mathbb{C}^* \cdot I_{|V|} = PGL_{|V|}(\mathbb{C})$

ist Gruppenhom.

(6.15) Folg: Angenommen es gibt einen selbstdualen isotrope Code vom Typ ϱ der Länge $N \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mathcal{C}(\varrho)$ endlich.

Bew: $\mathcal{C}(\varrho) / \underbrace{(\mathbb{C}^* I_{|V|} \cap \mathcal{C}(\varrho))}_{=: S(\varrho)}$ endlich nach 6.14

$\mathcal{C}(\varrho)$ hat Invariante, die homogen vom Grad N ist

$\Rightarrow$ $|S(\varrho)|$ teilt N denn für $s I_{|V|} \in S(\varrho)$, $p \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{|V|}]$ hom. vom Grad m ist $p(s I_{|V|} x) = s^m p(x)$

d.h. $|S(\varrho)|$ besteht aus N-ten EW. 23.6.

Bew (6.14): $\varrho|_{d(P(R,\Phi))} : P(R,\Phi) \to \varrho(P(R,\Phi)) = \langle m_r, d_\phi \rangle \leq \mathcal{C}(\varrho)$

ist sogar eine Darstellung nach (6.2).

Genügt für die H_{e,u_e,v_e} zu zeigen: Problem $P(R,\Phi)$ ist kein Normalteiler in $\mathcal{U}(R,\Phi)$!?

Strategie: Suchen $\mathcal{E} \leq GL_{|V|}(\mathbb{C})$ so daß

$\mathcal{C}(\varrho) \leq N_{GL_{|V|}(\mathbb{C})}(\mathcal{E})$, $C_{GL_{|V|}(\mathbb{C})}(\mathcal{E}) = \mathbb{C}^* \cdot I_{|V|}$

so daß $\mathcal{U}(R,\Phi)$ durch Automorphismen auf $\mathcal{E}$ operiert.

und zeigen dann, daß die beide Operationen (von $\mathcal{C}(\varrho)$ und $\mathcal{U}(R,\Phi)$) auf $\mathcal{E}$ übereinstimmen.

Für $f \in R$ def. $E(f,V) := V \times (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ mit Gruppenstruktur

$(x_1, q_1) + (x_2, q_2) := (x_1 + x_2, \beta(x_1, f x_2) + q_1 + q_2)$ (nichtabelsch)

Erinnerung:

$$\mathcal{U}(f,R,\Phi) = \{ (u,\Phi) \in P(R,\Phi) \mid u^{\mathcal{J}} f u - f = \psi^{-1}(\lambda(\phi)) \}$$

(6.15) **Bem:** $\mathcal{U}(f,R,\Phi)$ op. auf $E(f,V)$ durch

$${}^{(u,\phi)}(x,q) := (ux, q + \rho_{\Phi}(\phi)(x))$$ als Gruppe von Gruppenautom.

Bew: Operation: ✓ (geht für $P(R,\Phi)$)

Gruppenautom:

$${}^{(u,\phi)}((x_1,q_1) + (x_2,q_2))$$

$$= {}^{(u,\phi)}(x_1+x_2, q_1+q_2+\beta(x_1,fx_2))$$

$$= (u(x_1+x_2), q_1+q_2+\beta(x_1,fx_2) + \rho_{\Phi}(\phi)(x_1+x_2))$$

$${}^{(u,\phi)}(x_1,q_1) + {}^{(u,\phi)}(x_2,q_2) = (ux_1, q_1+\rho_{\Phi}(\phi)(x_1)) + (ux_2, q_2+\rho_{\Phi}(\phi)(x_2))$$

$$= (u(x_1+x_2), q_1+q_2+\beta(ux_1,fux_2) + \rho_{\Phi}(\phi)(x_1) + \rho_{\Phi}(\phi)(x_2))$$

zu zeigen: $\rho_M(\lambda(\phi))(x_1,x_2) = \beta(ux_1, fux_2) - \beta(x_1, f(x_2))$

$$= \beta(x_1, u^{\mathcal{J}} f u x_2) - \beta(x_1, fx_2) = \beta(x_1, (u^{\mathcal{J}} f u - f) x_2)$$

$$= \rho_M(\underbrace{\psi(u^{\mathcal{J}} f u - f)}_{\lambda(\phi)})(x_1,x_2).$$

(6.16) **Folg:** $\mathcal{U}(R,\Phi)$ operiert durch Gruppenautom. auf

$$\mathcal{E}(V) := E\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, V\times V\right) = (V\times V) \ltimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$((z_1,x_1),q_1) + ((z_2,x_2),q_2) = ((z_1+z_2, x_1+x_2), q_1+q_2+\beta(x_1,z_2))$$

(6.17) Bem: $\mathcal{E}(V)$ op. auf $\mathbb{C}[V]$ durch

$$((z,x),q)\cdot b_v = \exp(2\pi i(q+\beta(v,x)))\, b_{v+z}$$

Diese Darstellung ist absolut irreduzibel

Bew: $Z := \langle ((z,0),q) \in \mathcal{E}(V) \rangle \trianglelefteq \mathcal{E}(V)$ abelscher Normalteiler operiert als Diagonalmatrizen bzgl. Basis $(b_v \mid v \in V)$ mit $|V|$ verschiedenen Charakteren.

$$\Rightarrow\ C_{GL_{|V|}(\mathbb{C})}(Z) = \{\text{Diagonalmatrizen}\}$$

$X := \{((0,x),0) \mid x \in V\}$ permutiert die Basis $(b_v \mid v \in V)$ transitiv

$$\Rightarrow\ C_{GL_{|V|}(\mathbb{C})}(\langle X, Z\rangle) = \text{Diag. matr. die konst. auf Bahnen von } X$$
$$= \mathbb{C}^* \mathrm{id}_{|V|}.$$

(6.18) Bem:
- $\mathcal{C}(\rho)$ operiert durch Konjugation auf dem Bild von $\mathcal{E}(V)$ in $GL_{|V|}(\mathbb{C})$
- $\mathfrak{A}(R,\Phi)$ op. durch Gruppenautom. auf $\mathcal{E}(V)$.
- Die Operationen stimmen auf den Erzeugern überein (nachrechnen!)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}(V) \arrow[r, "g\in\mathfrak{A}(R,\Phi)"] \arrow[d] & \mathcal{E}(V) \arrow[d] \\
\overline{\mathcal{E}(V)} \leq GL_{|V|}(\mathbb{C}) \arrow[r, bend right, "\tilde g \in \mathcal{C}(\rho)"'] & \overline{\mathcal{E}(V)}
\end{tikzcd}$$

$\Longrightarrow$ Satz 6.14

$$\Rightarrow\ \widetilde{g\cdot h} = \tilde g \cdot \tilde h \cdot \text{Skalarmatrix}$$