

7. Übung algebraische Zahlentheorie

Prof. Dr. Nebe

(SS 2016)

Aufgabe 1. Bestimmen Sie (bis auf Isomorphie) alle Erweiterungen von \mathbf{Q}_5 von Grad 4.

Aufgabe 2. Sei K ein algebraischer Zahlkörper. Zeigen Sie: Die Menge der in K/\mathbf{Q} verzweigten Primzahlen ist endlich. Ist ferner $K \neq \mathbf{Q}$ so verzweigt mindestens eine Primzahl in K .

Aufgabe 3.

1. Bestimmen Sie $\mathbf{Q}_3(\sqrt{3})^*$.
2. Bestimmen Sie $\mathbf{Q}_3(\sqrt{-3})^*$.
3. Sei p eine Primzahl. Bestimmen Sie Erzeuger von $\mathbf{Q}_p^*/(\mathbf{Q}_p^*)^3$.

Aufgabe 4.

1. Es seien E/L und L/K endliche separable Erweiterungen. Zeigen Sie

$$D(E/K) = N_{L/K}(D(E/L))D(L/K)^{[E:L]} .$$

2. Es seien K_1/K und K_2/K endliche separable Erweiterungen und $L := K_1K_2$. Zeigen Sie: Sind $D(K_1/K)$ und $D(K_2 : K)$ teilerfremd und gilt $[L : K] = [K_1 : K][K_2 : K]$, so ist

$$D(L/K) = D(K_1/K)^{[K_2:K]} D(K_2/K)^{[K_1:K]} .$$

3. Es seien $K_1 = \mathbf{Q}(i)$, $K_2 = \mathbf{Q}(\sqrt{5})$, $K_3 = \mathbf{Q}(\sqrt{-5})$ und $L = \mathbf{Q}(i, \sqrt{5})$. Bestimmen Sie $D(L/\mathbf{Q})$, $D(K_i/\mathbf{Q})$ sowie $D(L/K_i)$ für $i = 1, 2, 3$. Gibt es ein Primideal in \mathbf{Z}_{K_3} welches in \mathbf{Z}_L verzweigt?

Hinweis zu (a): Ohne Einschränkung ist K vollständig diskret bewertet. Für (b) siehe Lemma 1.7.6.