4. Übung algebraische Zahlentheorie

Prof. Dr. Nebe **(SS 2016)**

Aufgabe 1. Sei $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-d})$ mit $d = 14$ bzw. $d = 30$. Bestimmen Sie jeweils den Isomorphietyp und ein Vertretersystem von $\mathrm{Cl}(K)$, $\mathrm{Cl}(K)^2$ und $\mathrm{Cl}(K)/\mathrm{Cl}(K)^2$.

Aufgabe 2. Sei K ein algebraischer Zahlkörper. Zeigen Sie:

1. Es sei $\mathfrak{b} = \prod_{i=1}^k \mathfrak{p}_i^{n_i} \trianglelefteq \mathbf{Z}_K$ ein Produkt von paarweise verschiedenen Primidealen. Weiter seien $b_i \in \mathfrak{p}_i^{n_i} - \mathfrak{p}_i^{n_i+1}$. Dann gibt es ein $x \in \mathfrak{b}$ mit $x \equiv b_i \mod \mathfrak{p}_i^{n_i+1}$ für alle $1 \leq i \leq k$.

2. Sind $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ zwei gebrochene Ideale in K, so ist $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + (x)$ für ein $x \in \mathfrak{b}$.

3. Jedes gebrochene Ideal von K kann mit (höchstens) zwei Elementen erzeugt werden.

Hinweis: (a) Chinesischer Restsatz.
(b) Ohne Einschränkung ist $\mathfrak{b} = \prod_{i=1}^k \mathfrak{p}_i^{n_i}$ ganz. Weiter darf man annehmen, dass $\mathfrak{a}$ ebenfalls ein Produkt der Ideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ ist.Wähle nun x wie in (a) und zeige dass jedes Primideal von $\mathbf{Z}_K$ die Ideale $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a} + (x)$ mit der selben Vielfachheit teilt.

Aufgabe 3. Es seien p und ℓ zwei Primzahlen und $K = \mathbf{Q}(\zeta_p)$. Zeigen Sie:

1. $\mathbf{Z}_K = \mathbf{Z}[\zeta_p]$.

2. $X^p - 1 \in \mathbf{F}_\ell[X]$ hat genau dann eine mehrfache Nullstelle in $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ falls $p = \ell$.

3. p ist die einzige Primzahl welche in $\mathbf{Z}_K$ verzweigt.

4. $\mathfrak{p} := (1 - \zeta_p)$ ist das einzige Primideal von $\mathbf{Z}_K$ welches p enthält und es gilt $e_\mathfrak{p} = p - 1$ sowie $f_\mathfrak{p} = 1$.

5. Sei $\ell \neq p$ und $\mathfrak{q}$ ein Primideal von $\mathbf{Z}_K$ mit $\ell \in \mathfrak{q}$. Dann ist $e_\mathfrak{q} = 1$ und $f_\mathfrak{q}$ ist die Ordnung von ℓ in $\mathbf{F}_p^*$.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die Primidealzerlegung von $\ell\mathbf{Z}[\zeta_7]$ für $\ell = 2, 3, 7, 13, 29$ sowie die Trägheits- bzw. Verzweigungsgrade und Erzeuger der auftretenden Primideale.