1. Übung algebraische Zahlentheorie

Prof. Dr. Nebe **(SS 2016)**

Aufgabe 1. Sei $d \in \mathbf{Z} - \{0, 1\}$ quadratfrei und $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$.

1. Bestimmen Sie eine Ganzheitsbasis von K.
2. Bestimmen Sie die Einheitengruppe $\mathbf{Z}_K^*$ im Fall $d < 0$.

Aufgabe 2. Sei $p > 2$ eine Primzahl. Weiter sei $d \in \mathbf{F}_p[X]$ quadratfrei mit $\deg d > 0$. Bestimmen Sie den ganzen Abschluss von $\mathbf{F}_p[X]$ in $\mathbf{F}_p(X, \sqrt{d}) = \mathbf{F}_p(X)[T]/(T^2 - d)$.

Aufgabe 3.

1. Zeigen Sie, dass jeder (kommutative) faktorielle Ring ganzabgeschlossen ist.
2. Begründen Sie warum $\mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ kein Hauptidealbereich ist.

Aufgabe 4. Sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Zeigen Sie:

1. Jedes $\alpha \in L$ induziert einen Endomorphismus $\mathrm{mult}_\alpha\colon L \to L,\ x \mapsto \alpha x$ des K-Vektorraums L.
2. Die Abbildung $\mathrm{mult}\colon L \to \mathrm{End}_K(L), \alpha \mapsto \mathrm{mult}_\alpha$ ist ein injektiver K-Algebrenmorphismus.
3. Die Abbildung $S_{L/K}\colon L \to K,\ \alpha \mapsto \mathrm{Spur}(\mathrm{mult}_\alpha)$ ist K-linear.
4. Die Abbildung $N_{L/K}\colon L \to K,\ \alpha \mapsto \det(\mathrm{mult}_\alpha)$ ist multiplikativ.
5. Für jedes $\alpha \in L$ ist $\mu_{\alpha,K}(X) \in K[X]$ irreduzibel von Grad $d := [K(\alpha) : K]$. Ferner ist d ein Teiler von $n := [L : K]$ und erfüllt $\mu_{\alpha,K}^{n/d} = \chi_{\alpha,K} = \chi_{\mathrm{mult}_\alpha}$.