7. Übung Algebraische Zahlentheorie II

Prof. Dr. Nebe **(WS 11/12)**

Definite Quaternionenalgebren: Mit $\mathcal{Q}_{\alpha,p_1,\ldots,p_s}$ bezeichnen wir die definite Quaternionenalgebra mit Zentrum $K := \mathbb{Q}[\alpha]$ (ein total reeller Zahlkörper) die unter Vervollständigung an der Stelle $\wp$ genau dann eine Divisionsalgebra ist, wenn $\wp$ eine der Stellen p_i ist.

Aufgabe 19.

a) Sei K ein imaginär quadratischer Zahlkörper. Zeigen Sie dass $\mathbb{Z}_K^* = \langle -1 \rangle$ außer für $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$ und $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$, wo $\mathbb{Z}_K^* \cong C_4$ resp. C_6.

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{Q}_{\infty,3}$ Typenzahl und Klassenzahl 1 hat. Die Maximalordnung dieser Divisionsalgebra ist ein (Links) Euklidischer Bereich.

c) Bestimmen Sie die Klassenzahl und Typenzahl der Quaternionenalgebra $\mathcal{Q}_{\infty,13}$.

d) Bestimmen Sie die Klassenzahl und Typenzahl der Quaternionenalgebra $\mathcal{Q}_{\infty,2,5,7}$.

Aufgabe 20. Bestimmen Sie (mit einem CAS, z.B. Magma) Klassenzahl, Typenzahl, das Brandtsche Gruppoid, Vertreter der Konjugiertenklassen von Maximalordnungen für die Quaternionenalgebra $\mathcal{Q}_{\sqrt{7},\infty,\infty}$.
Hinweis: $\zeta_K(-1) = \frac{2}{3}$ und die Klassenzahl $h(\mathbb{Z}_K) = 1$ für $K = \mathbb{Q}[\sqrt{7}] = Z(\mathcal{Q})$.

Aufgabe 21. Zeigen Sie, dass für jede Maximalordnung Λ_i die Ordnung der Automorphismengruppe des $\mathbb{Z}_K$-Gitters (Λ_i, N) gegeben ist als

$$|\operatorname{Aut}(\Lambda_i, N)| = \underbrace{\omega_i^1}_{left\ mult.} \underbrace{\omega_i 2^s H_i^{-1}}_{\kappa(normalizer)} \cdot \underbrace{2}_{-1} \cdot \underbrace{2}_{quat.conj.}.$$

Die Übung findet am Freitag, 9.12. im Seminarraum des Lehrstuhls B (Plesken) Templergraben 64, 3. Etage statt.

Abgabe: Freitag, den 9.12.2011, in der Vorlesung 10:00 Uhr im Hörsaal III.