2. Übung Algebraische Zahlentheorie II

Prof. Dr. Nebe **(WS 11/12)**

Aufgabe 4. Sei R ein Dedekindbereich mit Quotientenkörper K und V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum. Sei L ein R-Gitter in V.
(a) Ist M ein R-Gitter in V, so gilt $M_\wp = L_\wp$ für fast alle maximalen Ideale $\wp \trianglelefteq R$.
(b) Sei für alle $\wp \trianglelefteq_{\max} R$ ein $R_\wp$-Gitter $X(\wp)$ in V gegeben so dass $X(\wp) = L_\wp$ für fast alle maximalen Ideale $\wp \trianglelefteq R$. Dann ist $M := \bigcap_\wp X(\wp)$ ein Gitter in V mit $M_\wp = X(\wp)$ für alle $\wp$.
(c) Ist $\wp$ ein maximales Ideal von R, so liefert die Abbildung $M \mapsto M_\wp$ eine Bijektion zwischen

$$\{M \leq L \mid L/M \text{ ist } \wp\text{-torsion}\} \to \{M \leq L_\wp \mid M \text{ volles Gitter } \}$$

(d) Die Mengen der $R_\wp$-Gitter in V und die der $\hat{R}_\wp$-Gitter in der Vervollständigung $\hat{K}_\wp \otimes V$ stehen in Bijektion.

Aufgabe 5. Sei R Dedekindbereich, $\wp \trianglelefteq R$ ein maximales Ideal und $S := (R - \wp)^{-1}R$ die Lokalisierung von R an $\wp$. Zeigen Sie:
Ist

$$0 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz endlich erzeugter R-Moduln, so ist

$$0 \to S \otimes_R A \xrightarrow{id \otimes a} S \otimes_R B \xrightarrow{id \otimes b} S \otimes_R C \to 0$$

exakt. Kurz: Lokalisieren ist ein exakter Funktor.
Zeigen Sie auch dass Komplettieren ein exakter Funktor ist.

Aufgabe 6. (a) Sei Λ eine R-Maximalordnung in der separablen K-Algebra A. Dann ist der Matrixring $\Lambda^{n\times n}$ ein R-Maximalordnung in $A^{n\times n}$, insbesondere ist $R^{n\times n}$ eine R-Maximalordnung in $K^{n\times n}$.
(b) (unabhängig von (a)) Sei R ein Dedekindbereich und M ein volles R-Gitter in A. Dann ist $O_r(M) := \{a \in A \mid aM \subseteq M\}$ eine R-Ordnung in A.
Zeigen Sie, dass für jedes maximale Ideal $\wp \trianglelefteq R$ gilt

$$O_r(M_\wp) = O_r(M)_\wp \text{ und } O_r(\hat{M}_\wp) = \widehat{O_r(M)}_\wp.$$

Abgabe: Freitag, den 21.10.2011, in der Vorlesung 10:00 Uhr im Hörsaal III.