Die Algebra der Modulformen

Sergio Christian Siccha

1. Mai 2011

1 Wiederholung

Definition 1.1 (Wurzel)**:** *Ein Element $x \in \Gamma$ eines Gitters heißt Wurzel wenn $(x, x) = 2$ ist.*

Definition 1.2 (Theta-Reihe eines Gitters)**:** *Zu einem Gitter $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir die Theta-Funktion $\vartheta_\Gamma : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ des Gitters als*

$$\vartheta_\Gamma(\tau) := \sum_{x \in \Gamma} q^{\frac{1}{2}xx}, \quad q := e^{2\pi i \tau}.$$

Definition 1.3 (Modulgruppe)**:** *$G := SL_2(\mathbb{Z}) / \{\pm 1\}$ heißt Modulgruppe, G operiert auf $\mathbb{H}$ durch gebrochen-lineare Transformationen.*

Satz 1.4 (Fundamentalbereich)**:** *$D = \left\{\tau \in \mathbb{H} \;\middle|\; |\tau| \geq 1\ ,\ |Re\ \tau| \leq \frac{1}{2}\right\} \subset \mathbb{H}$ ist ein Fundamentalbereich für die Operation von G auf $\mathbb{H}$.*

Beispiel 1.5: *Äquivalente Gitter (siehe Tafel)*

Definition 1.6 (Modulform)**:** *Sei $k \in 2\mathbb{N}$, eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ nennt man (ganze) Modulform vom Gewicht k, falls gilt:*

(1) $f(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = (c\tau + d)^k f(\tau)$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$,

(2) f lässt sich in $q = e^{2\pi i \tau}$ in eine Potenzreihe entwickeln, d.h. f ist holomorph in $i\infty$.

Eine Modulform mit Nullstelle in $i\infty$ nennt man Spitzenform, d.h. die Fourierentwicklung um q hat Koeffizienten $a_0 = 0$.

Satz 1.7: *Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein gerades, unimodulares Gitter. Dann gilt*

(1) $n \equiv 0 \pmod 8$

(2) ϑ_Γ ist eine ganze Modulform vom Gewicht $\frac{n}{2}$

Ziel des Vortrags

Satz 3.10: *Die Algebra M der Modulformen ist als Algebra isomorph zum Polynomring $\mathbb{C}[E_4, E_6]$.*

Korollar 3.11: *Sei Γ ein gerades unimodulares Gitter im $\mathbb{R}^8$. Dann ist Γ isomorph zu $\mathbb{E}_8$.*

2 Die Eisenstein Reihen

Definition 2.1 (Eisenstein-Reihe)**:** *Sei $k \in \mathbb{Z}$, k gerade, $k > 2$. Die Reihe*

$$G_k(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau) = \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq 0}} \frac{1}{(m\tau + n)^k}$$

heißt Eisenstein-Reihe zum Gitter $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ von Ordnung k. Man schreibt auch $G_k(\tau)$.

Satz 2.2: *Die Eisenstein-Reihe $G_k(\tau)$ ist eine ganze Modulform vom Gewicht k.*

Man kann leicht einsehen dass G_k das gewünschte Transformationsverhalten unter Modulsubstitutionen besitzt. Um den Satz 2.2 zu beweisen brauchen wir nun noch einige Hilfslemmata:

Lemma 2.3: *Sei Γ ein Gitter in $\mathbb{C}$, für $\sigma > 2$ konvergiert die Reihe*

$$\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ \gamma\neq 0}} \frac{1}{|\gamma|^\sigma}.$$

Lemma 2.4: *G_k ist holomorph in der oberen Halbebene $\mathbb{H}$.*

Um Satz 2.2 zu beweisen bleibt noch zu zeigen dass G_k eine Potenzreihenentwicklung in $q = e^{2\pi i\tau}$ besitzt, d.h. dass G_k holomorph in $i\infty$ ist. Dazu brauchen wir die *Riemannsche $\zeta-$Funktion.*

Lemma 2.5: *Sei $\sigma_l(r) := \sum_{n|r} n^l$ die Summe der l-ten Potenzen der Teiler von r. Man erhält*

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{r=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(r)q^r.$$

Aus den Lemmata 2.3 (Konvergenz), 2.4 (Holomorphie) und 2.5 (PRE in $i\infty$) folgt nun der Satz 2.2, d.h. jede Eisenstein-Reihe ist eine Modulform vom Gewicht k.

Definition 2.6: *Die normierte Eisenstein-Reihe ist*

$$E_k(\tau) := \frac{1}{2\zeta(k)}G_k(\tau).$$

Aus der Funktionentheorie kennt man einen Zusammenhang zwischen den Bernoulli-Zahlen B_n und Werten der Riemannschen $\zeta-$Funktion. Die Bernoulli-Zahlen treten als Koeffizienten einer PRE auf:

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_k\frac{z^n}{n!}.$$

Man erhält dann *(ohne Beweis)*:

Lemma 2.7: *Für $k \in 2\mathbb{Z}, k \geq 2$ gilt*

$$\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k}{2\cdot k!}B_k.$$

Hieraus folgt direkt das

Korollar 2.8:

$$E_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{r=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(r)q^r.$$

Wir erhalten so explizite Darstellungen der Eisenstein-Reihen, z.B.

$$E_4(\tau) \ = \ 1 + 240\sum_{r=1}^{\infty}\sigma_3(r)q^r, \text{ und } \ E_6(\tau) \ = \ 1 - 504\sum_{r=1}^{\infty}\sigma_5(r)q^r.$$

Wir wissen nun dass $E_4(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = (c\tau+d)^4E_4(\tau)$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ gilt. Dann sind E_4^3 und E_6^2 Modulformen vom Gewicht 12, d.h. $E_4^3 - E_6^2$ ist ebenfalls eine Modulform vom Gewicht 12. Da der Koeffizient $a_0 = 0$ in der PRE um $q = e^{2\pi i\tau}$ ist, ist $E4^3 - E_6^2$ eine nicht-triviale Spitzenform. Um die PRE der erhaltenen Spitzenform zu normieren berechnen wir nun den führenden Koeffizienten:

$$(3\cdot 240 + 2\cdot 540)q = 1728q.$$

Die normierte Spitzenform $\Delta := \frac{1}{1728}(E_4^3 - E_6^2)$ - auch Diskriminante genannt - werden wir später gebrauchen um die Struktur der Algebra der Modulformen zu untersuchen. Die Diskriminante Δ tritt auch bei der Betrachtung elliptischer Funktionen bzw. Kurven auf.

3 Die Algebra der Modulformen

Definition 3.1: *Sei M_k der $\mathbb{C}$-Vektorraum der Modulformen von Gewicht k. Dann heißt $M := \bigoplus_{k=0}^{\infty} M_k$ die -durch das Gewicht- graduierte Algebra der Modulformen, die Multiplikation von Modulformen definiert eine Abbildung $M_k \times M_l \longrightarrow M_{k+l}$.*

Bemerkung 3.2: *M ist wohldefiniert denn durch das Verhalten unter Modulsubstitutionen ist das Gewicht jeder nicht-trivialen Modulform eindeutig festgelegt, d.h. die Summe ist direkt.*

Bemerkung 3.3: *Sei M_k^0 der $\mathbb{C}$-Vektorraum der Spitzenformen von Gewicht k. Dann ist M_k^0 der Kern der Linearform $M_k \longrightarrow \mathbb{C},\ f \mapsto f(i\infty)$. Also gilt dim $M_k/M_k^0 \leq 1$. Da außerdem für $k \in 2\mathbb{N},\ k \geq 4$ gilt dass die normierte Eisensteinreihe E_k ein Element von M_k mit $E_k(i\infty) = 1 \neq 0$ ist, erhalten wir*

$$M_k = M_k^0 \oplus \mathbb{C}E_k.$$

Wir werden nun die Anzahl Nullstellen und das Verhalten in $i\infty$ der Modulformen betrachten, um die Struktur von M_k zu untersuchen und letzten Endes Satz 3.10 zu beweisen.

Definition 3.4: *Sei $f \neq 0$ eine holomorphe Funktion von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{C}$, $p \in \mathbb{H}/G$, $\widetilde{p} \in \mathbb{H}$ ein Vertreter von p. Sei zusätzlich $\nu_{\widetilde{p}}(f)$ die Ordnung (der Nullstelle von) f in $\widetilde{p}$, dann definieren wir $\nu_p(f) := \nu_{\widetilde{p}}(f)$. Außerdem sei $\nu_{i\infty}(f) = r$ der Index des kleinsten Koeffizienten $a_r \neq 0$ in der PRE von f um $q = e^{2\pi i\tau}$*

$$f(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i q^i$$

Wir bezeichnen ab jetzt mit e_p die Ordnung des Stabilisators $Stab_G(\widetilde{p})$ eines Vertreters von p.

Bemerkung 3.5: *$\nu_p(f)$ ist wohldefiniert. Es ist $e_p = 2$ falls $p = [i]$, $e_p = 3$ falls $p = [\eta]$ und $e_p = 1$ sonst.*

Satz 3.6: *Sei $f \neq 0$ eine Modulform vom Gewicht k. Dann gilt:*

$$\nu_{i\infty}(f) + \sum_{p \in \mathbb{H}/G} \frac{1}{e_p}\nu_p(f) = \nu_{i\infty}(f) + \frac{1}{2}\nu_i(f) + \frac{1}{3}\nu_\eta(f) + \sum_{\substack{p \in \mathbb{H}/G \\ p \neq [i],[\eta]}} \nu_p(f) = \frac{k}{12}.$$

Bemerkung 3.7: *f hat nur eine endliche Anzahl Nullstellen in $\mathbb{H}/G$. Wir benutzen für den Beweis von 3.6 den Satz vom Argumentprinzip aus der Funktionentheorie.*

Bemerkung 3.8: *Aus Satz 3.6 folgt direkt dass Modulformen vom Gewicht 4, 6 und 12 genau eine Nullstelle von Ordnung 1 in η, in i bzw. in $i\infty$ haben.*

Korollar 3.9: *(1) Es gilt $M_k = 0$ für k ungerade, für $k < 0$ und für $k = 2$.*

(2) Es gilt $M_0 = \mathbb{C},\ M_0^0 = 0$, und für $k = 4,\ 6,\ 8,\ 10$ ist $M_k^0 = 0$ und $M_k = \mathbb{C}E_k$.

(3) Die Multiplikation mit $\Delta = \frac{1}{1728}(E_4^3 - E_6^2)$ definiert einen Isomorphismus von M_{k-12} nach M_k^0.

Als Folgerung aus diesem Korollar ergeben sich nicht-triviale analytische Identitäten, z.B.

$$E_4^2 = E_8 \text{ bzw. } 3 \cdot G_4^2 = 7 \cdot G_8.$$

Satz 3.10: *Die Algebra M der Modulformen ist als Algebra isomorph zum Polynomring $\mathbb{C}[E_4, E_6]$.*

Korollar 3.11: *Sei Γ ein gerades unimodulares Gitter im $\mathbb{R}^8$, dann ist Γ isomorph zu $\mathbb{E}_8$.*