Theta Funktionen als Modulformen

Vortrag zum Seminar Gitter und Codes

18.04.2011, Christian Löbbert

Dieser Vortrag behandelt die Abschnitte 2.1 bis 2.4 aus **Ebeling, Lattices and Codes**

1 Die Theta Funktion eines Gitters

Definition 1: Zu einem Gitter $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir die *Theta Funktion* ϑ_Γ *des Gitters* als

$$\vartheta_\Gamma(\tau) := \sum_{x\in\Gamma} q^{\frac{1}{2}x\cdot x}, \qquad q := e^{2\pi i\tau}$$

für $\tau \in \mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\tau > 0\} \subset \mathbb{C}$ (d.h. als Funktion auf der oberen Halbebene $\mathbb{H} \to \mathbb{C}$).

Dass dies für ein beliebiges Gitter $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ eine wohldefinierte, holomorphe Funktion ist, wird in Lemma 2 (s.u.) gezeigt. Für ein ganzes Gitter $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ist stets $x \cdot x = x^\top x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, d.h.

$$\vartheta_\Gamma(\tau) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r q^r$$

mit $a_r = |\{x \in \Gamma \mid x\cdot x = 2r\}| = \left|\Gamma \cap \partial B_{\sqrt{2r}}(0)\right|$, wobei $\partial B_{\sqrt{2r}}(0)$ die Sphäre mit Radius $\sqrt{2r}$ um den Ursprung ist. Somit wächst a_r wir die Oberfläche einer Sphäre mit Radius $\sqrt{2r}$ der Dimension $n-1$, also wie $\left(\sqrt{2r}\right)^{n-1}$. Es ist aber

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt[r]{\left(\sqrt{2r}\right)^{n-1}} = \lim_{r\to\infty} \left(\sqrt[r]{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(\sqrt[r]{r}\right)^{\frac{n-1}{2}} = 1,$$

folglich hat die Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} a_r q^r$ Konvergenzradius 1 und wegen $\tau \in \mathbb{H} \;\Leftrightarrow\; q = e^{2\pi i\tau} \in \dot{\mathbb{E}} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid 0 < |\tau| < 1\}$ ist also $\vartheta_\Gamma(\tau)$ für $\tau \in \mathbb{H}$ und Γ ganz wohldefiniert.

Ziel des Vortrages wird der Beweis des folgenden Satzes sein:

Satz 1: Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein gerades, unimodulares Gitter. Dann gilt

(i) $\quad n \equiv 0 \pmod 8$

(ii) $\quad \vartheta_\Gamma$ ist eine *Modulform vom Gewicht* $\frac{n}{2}$ (s.u.).

2 Modulformen

Die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ \det g = ad - bc = 1 \right\}$ operiert auf $\mathbb{H}$ via

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad (g,\tau) \mapsto g(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Die Operation eines $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$ bezeichnet man auch als *gebrochen lineare Transformation auf* $\mathbb{H}$. Man kann leicht nachrechnen, dass $g(\sigma) - g(\tau) = \frac{1}{(c\sigma+d)(c\tau+d)}(\sigma - \tau)$ für $\sigma, \tau \in \mathbb{C}$ gilt, d.h. insbesondere $\mathrm{Im}\, g(\tau) = \frac{1}{2i}(g(\tau) - g(\overline{\tau})) = \frac{1}{(c\tau+d)(c\overline{\tau}+d)} \cdot \frac{1}{2i}(\tau - \overline{\tau}) = \frac{\mathrm{Im}\tau}{|c\tau+d|^2}$. Somit $\mathrm{Im}\, g(\tau) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}\tau > 0$.

Das Zentrum $Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = \left\{\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ operiert trivial auf $\mathbb{H}$: $g(\tau) = \tau$ für $g \in Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, $\tau \in \mathbb{H}$.

Definition 2: Die Faktorgruppe $G := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) / \{\pm 1\}$ wird als *Modulgruppe* bezeichnet.

Wir werden zeigen, dass $G = \langle S, T\rangle$ mit $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Diese Elemente operieren als $S : \tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$ und $T : \tau \mapsto \tau + 1$ auf $\mathbb{H}$.

Erinnerung: $\tau \sim_G \tau' :\Leftrightarrow \exists g \in G : \tau = g(\tau')$ (sprich: τ und τ' sind äquivalent unter G). Die Äquivalenzklassen sind die Bahnen von G auf $\mathbb{H}$.

Definition 3: $D \subset \mathbb{H}$ heißt *Fundamentalbereich* für die Operation $G \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, falls

(i) für jedes $\tau \in \mathbb{H}$ ein $\tau' \in D$ existiert mit $\tau \sim_G \tau'$,

(ii) $\tau \sim_G \tau'$ für $\tau, \tau' \in D$, $\tau \neq \tau'$ impliziert, dass τ und τ' auf dem Rand von D liegen ($\tau, \tau' \in \partial D$).

Erinnerung: $\mathrm{Stab}_G(\tau) = \{g \in G \mid g(\tau) = \tau\}$.

Satz 2: Sei $D = \left\{\tau \in \mathbb{H} \mid |\tau| \geq 1, \ |\mathrm{Re}\tau| \leq \frac{1}{2}\right\} \subset \mathbb{H}$, $\eta := e^{2\pi i/3}$ (siehe Tafel)

(i) $D \subset \mathbb{H}$ ist ein Fundamentalbereich für die Operation $G \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$

(ii) Es gilt $\mathrm{Stab}_G(\tau) = \{1\}$ für $\tau \in D \setminus \{i, \eta, -\overline{\eta}\}$ und $\mathrm{Stab}_G(i) = \{1, S\}$, $\mathrm{Stab}_G(\eta) = \left\{1, ST, (ST)^2\right\}$, $\mathrm{Stab}_G(-\overline{\eta}) = \left\{1, TS, (TS)^2\right\}$

(iii) $G = \langle S, T\rangle$

mit $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ wie oben.

Definition 4: Sei $k \in 2\mathbb{N}$ (gerade, positive ganze Zahl). Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ heißt *Modulform vom Gewicht* k, falls folgende beide Bedingungen erfüllt sind:

(i) $f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau)$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$,

(ii) f lässt sich in $q = e^{2\pi i\tau}$ in eine Potenzreihe entwickeln, d.h. f ist holomorph in $\tau = i\infty$.

Bemerkung: (i) impliziert $f(\tau + b) = f\left(\frac{1\cdot\tau+b}{0\cdot\tau+1}\right) = (0\cdot\tau+1)^k f(\tau) = f(\tau)$ für $b \in \mathbb{Z}$, d.h. f ist periodisch. f lässt sich also in eine Laurentreihe in $q = e^{2\pi i\tau}$ entwickeln: $f(\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_r q^r$, $a_r \in \mathbb{C}$ für $r \in \mathbb{Z}$.
(ii) impliziert, dass es sich dabei sogar um eine Potenzreihe handelt, d.h. $a_r = 0\ \forall r < 0$.

Im Kontext von Satz 2 ist eine Modulform f vom Gewicht k durch eine Potenzreihe $f(\tau) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r q^r$ gegeben, die für $|q| < 1$ (d.h. $\tau \in \mathbb{H}$) konvergiert und $f\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^k f(\tau)$ erfüllt. Um also (in Satz 1) zu zeigen, dass ϑ_Γ Modulform vom Gewicht $\frac{n}{2}$ ist, ist zu zeigen, dass ϑ_Γ holomorph auf $\mathbb{H}$ ist, dass $\frac{n}{2}$ gerade ist und dass ϑ_Γ die Identität

$$\vartheta_\Gamma\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^{\frac{n}{2}}\vartheta_\Gamma(\tau)$$

erfüllt. Dies wird sich aus der Poisson Summenformel ergeben.

3 Die Poisson Summenformel

$\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ sei ein beliebiges volles Gitter und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, welche die folgenden drei Bedingungen (V1), (V2) und (V3) erfüllt:

(V1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx < \infty$

(V2) Die Reihe $\displaystyle\sum_{x\in\Gamma} |f(x+u)|$ konvergiert kompakt gleichmäßig in $u \in \mathbb{R}^n$

(V3) Die Reihe $\displaystyle\sum_{y\in\Gamma^\#} \hat{f}(y)$ ist absolut konvergent.

$\hat{f}$ sei die Fourier Transformation von f, welche als $\hat{f}(y) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-2\pi i(x\cdot y)}\, dx$ definiert ist.

Bemerkung: (V1) impliziert die Existenz der Fourier Transformation,
(V2) impliziert, dass die Funktion $F(u) := \displaystyle\sum_{x\in\Gamma} f(x+u)$ stetig auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Satz 3 (Poisson Summenformel): Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein volles Gitter und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, welche (V1), (V2) und (V3) erfüllt. Dann gilt:

$$\sum_{x\in\Gamma} f(x) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma)} \sum_{y\in\Gamma^\#} \hat{f}(y).$$

Lemma 1: Die Funktion $f\,:\,x\mapsto e^{-\pi\left(\frac{1}{t}\right)x^2}$ ($x\in\mathbb{R}^n$, $t>0$) besitzt die Fourier Transformation $\hat{f}(y)=\left(\sqrt{t}\right)^n e^{-\pi t y^2}$, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\left(\frac{1}{t}\right)x^2} e^{-2\pi i x\cdot y}\,dx=\left(\sqrt{t}\right)^n e^{-\pi t y^2}. \qquad (\star\star\star)$$

(Für $t=1$ hat man insbesondere, dass $f\,:\,x\mapsto e^{-\pi x^2}$, $x\in\mathbb{R}^n$ gleich ihrer Fourier Transformation ist.)

4 Theta Funktionen als Modulformen

Wir wollen nun Satz 1 beweisen. Dafür zunächst 2 Lemmas:

Lemma 2: $\Gamma\subset\mathbb{R}^n$ sei volles Gitter. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{x\in\Gamma} q^{\frac{1}{2}x\cdot x}=\sum_{x\in\Gamma} e^{\pi i\tau x^2}$$

gleichmäßig absolut für alle τ mit $\mathrm{Im}\tau\geq v_0>0$ (also lokal gleichmäßig absolut konvergent auf $\mathbb{H}$) und ist somit eine holomorphe Funktion.

Lemma 3. Für ein volles Gitter $\Gamma\subset\mathbb{R}^n$ gilt die Identität

$$\vartheta_\Gamma\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\left(\frac{\tau}{i}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{\mathrm{vol}\left(\mathbb{R}^n/\Gamma\right)}\vartheta_{\Gamma^\#}(\tau).$$

Beweis von Satz 1: Sei Γ ein gerades, unimodulares Gitter in $\mathbb{R}^n$. Wir zeigen zunächst (i): Angenommen n ist nicht durch 8 teilbar. Sei o.E. $n\equiv 4 \pmod 8$ (sonst betrachte $\Gamma\perp\Gamma\subset\mathbb{R}^{2n}$ bzw. $\Gamma\perp\Gamma\perp\Gamma\perp\Gamma\subset\mathbb{R}^{4n}$). Lemma 3 besagt dann ($\Gamma^\#=\Gamma$ und $\mathrm{vol}\left(\mathbb{R}^n/\Gamma\right)=1$):

$$\vartheta_\Gamma\left(-\frac{1}{\tau}\right)=(-1)^{\frac{n}{4}}\tau^{\frac{n}{2}}\vartheta_\Gamma(\tau)=-\tau^{\frac{n}{2}}\vartheta_\Gamma(\tau).$$

Da Γ gerade, ist ϑ_Γ invariant unter $T\,:\,\tau\mapsto\tau+1$, also

$$\vartheta_\Gamma\left(T\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right)=\vartheta_\Gamma\left((TS)\,\tau\right)=-\tau^{\frac{n}{2}}\vartheta_\Gamma(\tau).$$

Folglich erhält man wegen $(TS)\,\tau=1-\frac{1}{\tau}=\frac{\tau-1}{\tau}$ und $(TS)^2\,\tau=1-\frac{\tau}{\tau-1}=\frac{-1}{\tau-1}$:

$$\vartheta_\Gamma\left((TS)^3\,\tau\right) \;=\; -(-1)^{\frac{n}{2}}\vartheta_\Gamma(\tau)=-\vartheta_\Gamma(\tau).$$

Dies ist ein Widerspruch zu $(TS)^3=1$, also zu $\vartheta_\Gamma\left((TS)^3\,\tau\right)=\vartheta_\Gamma(\tau)$ und es folgt (i).

Da nun $n\equiv 0\pmod 8$ gezeigt ist, erhalten wir aus Lemma 3 (mit $\Gamma^\#=\Gamma$ und $\mathrm{vol}\left(\mathbb{R}^n/\Gamma\right)=1$):

$$\vartheta_\Gamma\left(-\frac{1}{\tau}\right)=(-i)^{\frac{n}{2}}\tau^{\frac{n}{2}}\vartheta_\Gamma(\tau)=\tau^{\frac{n}{2}}\vartheta_\Gamma(\tau),$$

ϑ_Γ ist also Modulform vom Gewicht $\frac{n}{2}$, das ist (ii). □