Dichte Kugelpackungen

Andrés Goens und Ansgar Wigger

30. Mai 2011

1 Einleitung

Lemma 1.1 (Hadamard Ungleichung). *Ist B eine Gitterbasis von L, so ist* $\det(L) \leq \prod_{j=1}^{n}(b_j, b_j)$.

Satz 1.2. *Für alle $S \in \mathbb{R}$ ist $L_{\leq S} := \{\ell \in L \,|\, (\ell, \ell) \leq S\}$ endlich.*

Satz 1.3 (Hermite Ungleichung). *Sei $L \subseteq (V, (,))$ ein Gitter. Dann gibt es eine Gitterbasis $B = (b_1, \cdots, b_n)$ von L so dass*

$$\prod_{i=1}^{n}(bi, bi) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{n(n-1)/2} \det(L)$$

gilt.

Lemma 1.4. *Sei L ein Gitter in $\mathbb{R}^n$ und $(x_1, \ldots, x_n) \in L^n$ linear unabhängig. Dann gilt* $\det(L) \leq \det(\langle x_1, \ldots, x_n\rangle_{\mathbb{Z}})$

Definition 1.5. *a) Für ein Gitter L ist die Menge*

$$\mathcal{K}_L := \bigcup_{l \in L} B_r(l) \;\; mit \;\; r = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \,|\, B_r(l) \cap B_r(l') = \emptyset \quad \forall\, l \neq l' \in L\}$$

die Kugelpackung von L.

b) Die Dichte Δ der Kugelpackung ist definiert als

$$\Delta(L) := \frac{\mathfrak{L}^n(B_r(0))}{\mathfrak{L}^n(P(B))}.$$

Dabei bezeichnet

$$P(B) := \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \,|0 \leq \lambda_i \leq 1 \;\; für \; alle \; 1 \leq i \leq n\}$$

das von den Gitterbasisvektoren $B = (b_1, \ldots, b_n)$ aufgespannte Parallelepiped und $\mathfrak{L}^n$ das Lebesgue-Maß in n Dimensionen. Das Volumen dieses ist von der Gitterbasis unabhängig, also insbesondere ist $\Delta(L)$ wohldefiniert.

2 Dichte Kugelpackungen.

Definition 2.1. *Sei $L \in (\mathbb{R}^n, (,))$ ein Gitter. Dann ist*

$$\min(L) := \min\{(\ell, \ell) \mid 0 \neq \ell \in L\}$$

das Minimum *von L und*

$$S(L) := \{\ell \in L \mid (\ell, \ell) = \min(L)\}$$

die Menge der kürzesten Vektoren von L. Nach Satz 1.2 ist $S(L) = \{\ell_1, \ldots, \ell_k\}$ eine endliche Menge. $k = |S(L)|$ heißt auch die Kußzahl *oder auch* kissing number *von L.*

Der Radius r von $\mathcal{K}(L)$ ist $\frac{1}{2}\sqrt{\min(L)}$. Die Kußzahl ist die Anzahl der Kugeln in der Gitterkugelpackung, die eine feste weitere Kugel berühren.

Definition 2.2. *Bezeichne $\mathcal{L}_n$ die Menge aller n-dimensionalen Gitter. Die* Hermite-Funktion *$\gamma : \mathcal{L}_n \to \mathbb{R}_{>0}$ ist definiert durch*

$$\gamma(L) := \frac{\min(L)}{\det(L)^{1/n}}.$$

$\gamma_n := \sup\{\gamma(L) \mid L \in \mathcal{L}_n\}$ heißt die Hermite-Konstante*.*

Bemerkung 2.3. *Es ist*

$$\Delta(L) = 2^{-n}\gamma(L)^{n/2}V_n$$

wobei V_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel bezeichnet. Insbesondere ist $\Delta(L)$ maximal, genau dann wenn $\gamma(L)$ maximal ist.

Bemerkung 2.4. *a) $\mathbb{R}^* O_n(\mathbb{R}) \leq GL_n(\mathbb{R})$ operiert auf $\mathcal{L}_n$ durch anwenden. $\gamma(L)$ ist eine Invarainte dieser Operation. Die Restklassen nach $O_n(\mathbb{R})$ heißen auch Isometrieklassen. Insbesondere kann man eine Funktion, die hier auch γ genannt wird, auf den Bahnen von $\mathbb{R}^* O_n(\mathbb{R})$ definieren: $\gamma : \mathcal{L}_n/(\mathbb{R}^* O_n(\mathbb{R})) \to \mathbb{R}_{>0}$, $[L] \mapsto \gamma(L)$.*

b) Analog operiert $GL_n(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{R}^{n\times n}_{sym,>0}$ durch anwenden und $\mathbb{R}_{>0}$ operiert auf den Nebenklassen durch Multiplikation. Bezeichnet man die Doppelnebenklassen mit $Quad_n := \mathbb{R}_{>0} \backslash \mathbb{R}^{n\times n}_{sym,>0} / GL_n(\mathbb{Z})$, so bekommt man eine Abbildung

$$Gram : \mathcal{L}_n/(\mathbb{R}^* O_n(\mathbb{R})) \to Quad_n, [L] \mapsto [\mathcal{G}(B)],$$

wo B eine Gitterbasis von L ist. Diese ist eine Bijektion.

c) Auf $Sym_n(\mathbb{R}) := \mathbb{R}^{n\times n}_{sym} := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = A^{tr}\}$ *definiert* $(A, B) := Spur(AB)$ *ein Skalarprodukt und macht* $Sym_n(\mathbb{R})$ *zu einem Euklidischen Vektorraum* $(Sym_n(\mathbb{R}), Spur)$ *(der Dimension* $n(n+1)/2$*). Diese Skalarprodukt definiert auch eine Topologie auf* $Sym_n(\mathbb{R})$*.*

Definition 2.5. *Sei* $F \in Sym_n(\mathbb{R})$ *positiv definit.*

a) $\min(F) := \min\{\ell^{tr}F\ell \mid 0 \neq \ell \in \mathbb{Z}^n\}$ *heißt das* Minimum *von* F*.*

b) $S(F) := \{\ell \in \mathbb{Z}^n \mid \ell^{tr}F\ell = \min(F)\}$ *die Menge aller kürzesten Vektoren von* F*.*

c) $\gamma(F) := \frac{\min(F)}{\det(F)^{1/n}}$ *die* Hermite-Funktion *bei* F*.*

Bemerkung 2.6. *Sei* $F \in Sym_n(\mathbb{R})$ *positiv definit. Es gilt:*

a) $\gamma(aF) = \gamma(F)$ *für alle* $a \in \mathbb{R}_{>0}$*.*

b) $\gamma(TFT^{tr}) = \gamma(F)$ *für alle* $T \in GL_n(\mathbb{Z})$*.*

c) $\gamma(L) = \gamma([L]) = \gamma(Gram(L))$*.*

Definition 2.7. *Ein Gitter* $L \in \mathcal{L}_n$ *heißt* extrem*, falls* $[L]$ *ein lokales Maximum der Hermite Funktion* $\gamma : \mathcal{L}_n/(\mathbb{R}^* O_n(\mathbb{R})) \to \mathbb{R}$ *ist, also falls es eine Umgebung* $\mathcal{U}$ *von* $F := Gram(L)$ *in* $Sym_n(\mathbb{R})$ *gibt, so dass* $\gamma_{|\mathcal{U}}$ *sein Maximum in* F *annimmt.*

Beispiele 2.8. *Alle extremalen Gitter in* $\mathcal{L}_2$ *sind isomorph zu* $\mathbb{A}_2$*.*

2.1 Perfekte Gitter

Definition 2.9. *Eine positive definite Matrix* $F \in Sym_n(\mathbb{R})$ *heißt* perfekt*, falls*

$$\langle xx^{tr} \mid x \in S(F)\rangle_{\mathbb{R}} = Sym_n(\mathbb{R}).$$

Bemerkung 2.10. *Definition 2.9 ist koordinatenunabhängig. Ist* $T \in GL_n(\mathbb{Z})$*,* $s \in \mathbb{R}_{>0}$ *so ist* F *perfekt* $\Leftrightarrow$ $sTFT^{tr}$ *perfekt. Perfektion ist also eine Eigenschaft der Klasse von* F *in* $Quad_n$*. Ein Gitter* $L \in \mathcal{L}_n$ *heißt* perfekt*, falls* $Gram(L) \in Quad_n$ *perfekt ist.*

Satz 2.11 (Korkine, Zolotareff)**.** $F \in Sym_{n,>0}(\mathbb{R})$ *ist perfekt, genau dann wenn*

$$\{A \in Sym_n(\mathbb{R}) \mid x^{tr}Ax = \min(F) \text{ für alle } x \in S(F)\} = \{F\}.$$

Die Matrix F *ist durch ihre kürzesten Vektoren eindeutig bestimmt.*

Folgerung 2.12. *Sei* $F \in Sym_n(\mathbb{R})$ *positiv definit. Dann ist* $|S(F)| \geq n(n+1)$*.*

Bemerkung 2.13. *Ist* $F \in Sym_n(\mathbb{R})$ *perfekt, so ist* $\langle S(F)\rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$*.*

Folgerung 2.14. *Ist* $F \in Sym_n(\mathbb{R})$ *perfekt, so gibt es ein* $a \in \mathbb{R}_{>0}$ *mit* $aF \in \mathbb{Z}^{n\times n}$*.*

Satz 2.15. *(Voronoi) Bis auf Ähnlichkeit gibt es nur endlich viele perfekte Gitter in* $\mathcal{L}_n$. $Perf_n := \{[L] \in \mathbb{R}_{>0} \backslash \mathcal{L}_n / O_n(\mathbb{R}) \mid L \text{ ist perfekt } \}$ *ist endlich.*

Beispiele 2.16. $\mathbb{A}_2$ *ist einziges 2-dimensionales perfektes Gitter.*

2.2 Eutaktische Gitter

Definition 2.17. *Eine positiv definite Matrix* $F \in Sym_n(\mathbb{R})$ *heißt* eutaktisch, *falls es Zahlen* $\rho_x > 0$ *für alle* $x \in S(F)$ *gibt mit*

$$F^{-1} = \sum_{x \in S(F)} \rho_x x x^{tr}.$$

Bemerkung 2.18. *Eutaktisch zu sein ist eine Eigenschaft von* $[F] \in Quad_n$. *Daher nennen wir ein Gitter* L eutaktisch, *genau dann wenn* $Gram(L)$ *eutaktisch ist.*

Lemma 2.19. *Die Anzahl der kürzesten Vektoren von* $\mathbb{A}_n$ *ist* $n(n+1)$.

Beispiele 2.20. I_n *ist eutaktisch aber nicht perfekt.*
$\mathbb{A}_n$ *ist eutaktisch und perfekt.*

3 Satz von Voronoi

3.1 Satz von Voronoi

Satz 3.1 (Voronoi)**.** *Ein Gitter* L *ist extrem genau dann wenn es perfekt und eutaktisch ist.*

Daraus erhält man dann z.B., dass das Gitter $\mathbb{A}_n$ eine lokal dichteste Kugelpackung liefert.

Folgerung 3.1. *(aus dem Hauptsatz)* $Extr_n := \{[L] \in \mathbb{R}_{>0} \backslash \mathcal{L}_n / O_n(\mathbb{R}) \mid L \text{ ist extrem } \}$ *ist endlich.*

Anzahl Ähnlichkeitsklassen perfekter Gitter.[1]

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lvert\mathrm{Perf}_n\rvert$	1	1	1	2	3	7	33	10916	≥ 524289
$\lvert\mathrm{Extr}_n\rvert$	1	1	1	2	3	6	30	2408	≥ 12814

3.2 Der Beweis der Voronoischen Charakterisierung extremer Gitter.

Satz 3.2 (Stiemke, 1915)**.** *Sei* V *ein* $\mathbb{R}$*-Vektorraum,* $\varphi_1, \ldots, \varphi_t \in V^*$. *Äquivalent sind:*
(i) $\{x \in V \mid \varphi_j(x) \geq 0 \text{ für alle } 1 \leq j \leq t\} = \bigcap_{i=1}^{t} \ker(\varphi_i)$.
(ii) Es gibt $a_1, \ldots, a_t \in \mathbb{R}_{>0}$ *mit* $a_1\varphi_1 + \ldots + a_t\varphi_t = 0$.

[1]Quelle: Skript Gitter und Codes 2007 `http://www.math.rwth-aachen.de/~nebe/Vorl/Gitter/Gitteralt.pdf`