Modulformen

Vortrag zum Seminar zu Gitter und Codes, 21.04.2015

Sebastian Nell

Dieser Vortrag behandelt Modulgruppe und Modulform, wir definieren den Fundamentalbereich und diskutieren seine Bedeutung. Im zweiten Teil wird dann die Poissonsche Summenformel eingeführt, die uns in späteren Vorträgen noch begegnen wird.

§1 Die Modulgruppe

Im ersten Abschnitt wird die Modulgruppe und anschließend die Modulform eingeführt. Dazu wird eine Gruppenoperation benötigt, die im Folgenden definiert wird.

(1.1) Satz
Sei $\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}\ \tau > 0\} \subset \mathbb{C}$ die obere Halbebene der komplexen Zahlen.

Die *spezielle lineare Gruppe*

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) := \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \det(g) = ad - bc = 1 \right\}$$

operiert auf $\mathbb{H}$ durch gebrochene lineare Transformation

$$(g, \tau) \mapsto g(\tau) := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

◇

Beweis
Zeige, dass die gegebene Abbildung

$$\omega : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}, (g, \tau) \mapsto g(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

die Bedingungen der Gruppenoperation erfüllt:

1. $1_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(\tau) = \tau$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$: Sei also $\tau \in \mathbb{H}$ beliebig. Es ist $1_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann folgt $1_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(\tau) = \frac{1\tau+0}{0\tau+1} = \tau$.

2. $(gh)(\tau) = g(h(\tau))$ für alle $\tau \in \mathbb{H}, g, h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$: Sei also $\tau \in \mathbb{H}$ beliebig, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} j & k \\ l & m \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ beliebig. Dann ist

$$(gh)(\tau) = \begin{pmatrix} aj+bl & ak+bm \\ cj+dl & ck+dm \end{pmatrix}(\tau) = \frac{(aj+bl)\tau + (ak+bm)}{(cj+dl)\tau + (ck+dm)}.$$

$$g(h(\tau)) = g\left(\frac{j\tau+k}{l\tau+m}\right) = \frac{a\frac{j\tau+k}{l\tau+m}+b}{c\frac{j\tau+k}{l\tau+m}+d} = \frac{\frac{aj\tau+ak+bl\tau+bm}{l\tau+m}}{\frac{cj\tau+ck+dl\tau+dm}{l\tau+m}} = \frac{(aj+bl)\tau + (ak+bm)}{(cj+dl)\tau + (ck+dm)}.$$

Fehlt noch, dass die Operation auf die obere Halbebene abbildet. Dies wird in Lemma (1.2) bewiesen. □

Im Folgenden ist mit $\mathbb{H}$ immer die in Satz (1.1) angegebene Definition gemeint.

Nun wollen wir einige Eigenschaften dieser Operation zeigen. Über sie werden wir die Modulgruppe einführen.

(1.2) Lemma
Sei $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Dann gilt für $\tau \in \mathbb{H}$, dass

$$\mathrm{Im}\ \tau > 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\ g(\tau) = \frac{\mathrm{Im}\ \tau}{|c\tau+d|^2} > 0.$$

◇

Dieses Lemma schließt den Beweis zu Satz (1.1) ab. Die Aussage über den Imaginärteil von $g(\tau)$ wird später noch verwendet werden.

Beweis
Zu zeigen ist, dass $\mathrm{Im}\ g(\tau) = \frac{\mathrm{Im}\ \tau}{|c\tau+d|^2}$ ist. Die Abschätzung $\mathrm{Im}\ g(\tau) > 0$, wenn $\mathrm{Im}\ \tau > 0$ ist, ist dann klar.
Sei also $\tau = x + iy \in \mathbb{H}, g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Dann ist

$$g(\tau) = \frac{a\tau+b}{c\tau+d} = \frac{(ax+b)+(ay)i}{(cx+d)+(cy)i} = \frac{((ax+b)+(ay)i)((cx+d)-(cy)i)}{((cx+d)+(cy)i)((cx+d)-(cy)i)}$$

$$= \frac{\zeta + (cx+d)(ay)i - (ax+b)(cy)i}{(cx+d)^2+(cy)^2} = \frac{\zeta + (acx - acx + \overbrace{(ad-bc)}^{=1})yi}{|c\tau+d|^2}$$

$$= \frac{\zeta + yi}{|c\tau+d|^2}.$$

Hierbei ist ζ rein reell. Da wir uns nur für den Imaginärteil von τ interessieren, reicht es uns, nur diesen zu berechnen.

$$\text{Aus obiger Gleichung folgt } \operatorname{Im} g(\tau) = \frac{y}{|c\tau + d|^2} = \frac{\operatorname{Im} \tau}{|c\tau + d|^2}. \qquad \square$$

Wir bestimmen nun das Zentrum der speziellen linearen Gruppe und treffen eine Aussage über sein Verhalten.

(1.3) Bemerkung
Das Zentrum $\{\pm 1\}$ von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ operiert trivial auf der Menge $\mathbb{H}$. ◇

Hiermit kommen wir schließlich zur Definition der Modulgruppe:

(1.4) Definition
Der Quotient

$$\mathbb{G} := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) / \{\pm 1\}$$

wird *Modulgruppe* genannt. ◇

Wir wollen nun versuchen, zwei einfache Elemente $S, T \in \mathbb{G}$ zu finden, sodass gilt $\langle S, T \rangle = \mathbb{G}$.

(1.5) Lemma
Definiere zwei Matrizen $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S, T \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und identifiziere sie mit ihren Restklassen in $\mathbb{G}$. Bei Anwendung von S und T auf $\mathbb{H}$ ergibt sich $S : \tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$, $T : \tau \mapsto \tau + 1$. ◇

Beweis
Folgt sofort durch Anwenden von S und T auf ein beliebiges τ. □

(1.6) Bemerkung
Die Aussage, die beiden Matrizen mit ihren Restklassen in $\mathbb{G}$ zu identifizieren, ist deshalb erlaubt, da $\{\pm 1\}$ der Kern der Operation ist. Es macht demnach keinen Unterschied, ob eine Matrix oder ihr Negatives auf $\mathbb{H}$ operiert. Beispielsweise gilt für die Restklasse $\{S, -S\} = [S]$: $S(\tau) = -\frac{1}{\tau}$ und $(-S)(\tau) = \frac{0\tau-(-1)}{-(1\tau)+0} = \frac{-(-1)}{-\tau} = -\frac{1}{\tau} = S(\tau)$. Dies gilt nach Bemerkung (1.3) für beliebige $g \in \mathbb{G}$, sodass wir uns in Rechnungen auf die einzelnen Matrizen beschränken dürfen. Es ist lediglich zu beachten, dass dann die Stabilisatoren nur die Hälfte der enthaltenen Elemente angeben. Denn wenn $g \in Stab_{\mathbb{G}}(\tau)$ ist, so folgt sofort, dass auch $-g \in Stab_{\mathbb{G}}(\tau)$ ist. ◇

Zum Beweis siehe Bemerkung (1.10).

(1.7) Definition
Seien $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$. Mit $\sim$ bezeichnen wir die Äquivalenzrelation der Bahngleichheit bezüglich der Gruppenoperation, definiert durch

$$\tau \sim \tau' \Leftrightarrow \exists\, g \in \mathbb{G} \text{ mit } \tau = g(\tau').$$ ◇

Das Wissen um die Äquivalenzrelation wird uns im Beweis des nächsten Satzes helfen.

(1.8) Definition
Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{H}$ heißt *Fundamentalbereich* der Operation von $\mathbb{G}$ auf $\mathbb{H}$, wenn sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. Für alle $\sigma \in \mathbb{H}$ existiert ein $\tau \in D$, sodass $\sigma \sim \tau$.
2. Für $\tau, \tau' \in D, \tau \neq \tau'$ gilt $\tau \sim \tau' \Rightarrow \tau, \tau' \in \partial D$. ◇

(1.9) Satz
Sei $D \subset \mathbb{H}$ die Menge aller $\tau \in \mathbb{H}$ mit $|\mathrm{Re}\ \tau| \leq \frac{1}{2}$ sowie $|\tau| \geq 1$.
Sei $\eta = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ einer der Eckpunkte der Menge D.

1. D ist ein Fundamentalbereich der Operation von $\mathbb{G}$ auf $\mathbb{H}$.
2. Sei $\tau \in D$. Dann ist $Stab_{\mathbb{G}}(\tau) = \{1\}$, wenn $\tau \notin \{i, \eta, -\overline{\eta}\}$, $Stab_{\mathbb{G}}(i) = \{1, S\}$, $Stab_{\mathbb{G}}(\eta) = \{1, ST, (ST)^2\}$, $Stab_{\mathbb{G}}(-\overline{\eta}) = \{1, TS, (TS)^2\}$.
3. Die Gruppe $\mathbb{G}$ wird von S und T erzeugt. ◇

Beweis
Sei zunächst $\mathbb{G}'$ die Untergruppe von $\mathbb{G}$ erzeugt von S und T.
Zu 1.: Wir zeigen zuerst, dass für alle $\tau \in \mathbb{H}$ ein $g \in \mathbb{G}'$ existiert mit $g(\tau) \in D$. Sei also $\tau \in \mathbb{H}$, $g \in \mathbb{G}'$ so gewählt, dass $|\mathrm{Re}(g(\tau))| \leq \frac{1}{2}$ und $\mathrm{Im}\ g(\tau) = \frac{\mathrm{Im}\ \tau}{|c\tau+d|^2}$ maximal wird.
Es ist sofort klar, dass die an die Matrix g gestellte Bedingung $|\mathrm{Re}(g(\tau))| \leq \frac{1}{2}$ erfüllbar ist (Multiplikation mit T). Auch die Bedingung an den Imaginärteil ist erfüllbar, denn aus $\mathrm{Im}\ g(\tau) = \frac{\mathrm{Im}\ \tau}{|c\tau+d|^2}$ und $\mathrm{Im}\ \tau$ fest folgt $|c\tau + d|^2$ minimal. Da $c = 0, d = 1$ immer wählbar ist, kann man $|c\tau + d|^2 \leq 1$ abschätzen. Hieraus folgt, dass $|c\tau + d|^2$ tatsächlich ein Minimum annimmt, denn es gibt nur endlich viele Paare $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, für die $|c\tau + d|^2 \leq 1$ ist (klar mit $\tau = x + iy$). Somit finden wir für alle $\tau \in \mathbb{H}$ ein $g \in \mathbb{G}$ mit oben genannten Bedingungen. Zeige also, dass für ein solches g folgt $|g(\tau)| \geq 1$:
Beweis durch Widerspruch: Sei $g \in \mathbb{G}'$ so gewählt, dass obige Bedingungen erfüllt sind, aber $|g(\tau)| \leq 1$. Dann ist aber $\mathrm{Im}\ (Sg)(\tau) = \frac{\mathrm{Im}\ g(\tau)}{|g(\tau)|^2} > \mathrm{Im}\ g(\tau)$ im Widerspruch zur Annahme, dass $\mathrm{Im}\ g(\tau)$ maximal ist. Daraus folgt die erste Bedingung an den Fundamentalbereich.

Wir zeigen nun, dass für alle $\tau, \tau' \in D, \tau \neq \tau'$ gilt $\tau \sim \tau' \Rightarrow \tau, \tau' \in \partial D$. Dazu seien $\tau, \tau' \in D, \tau \neq \tau', \tau \sim \tau'$. Wir können uns also ein $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{G}$ wählen, sodass $\tau' = g(\tau)$ ist. Ohne Beschränkung der Annahme sei $\mathrm{Im}\ g(\tau) \geq \mathrm{Im}\ \tau$ (sonst tausche τ mit τ' und ersetze g mit seinem Inversen). Wegen $\mathrm{Im}\ g(\tau) = \frac{\mathrm{Im}\ \tau}{|c\tau+d|^2}$ und $\mathrm{Im}\ \tau$ gilt wieder $|c\tau + d|^2 \leq 1$. Schreibe $\tau = x + iy$. Wegen $\tau \in D$ ist $y \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Deshalb ist $|c\tau + d|^2 = c^2y^2 + (cx + d)^2 \leq 1 \Rightarrow c^2 \leq \frac{4}{3}$ (wenn $(cx + d)^2 = 0$ ist, und y minimal ist, kann c maximal werden. Zur Bestimmung aller Möglichkeiten brauchen wir diesen Maximalwert). Wegen $c \in \mathbb{Z}$ folgt $c \in \{-1, 0, 1\}$.
Wir machen nun eine Fallunterscheidung. Sei also zunächst $c = 0$. Dann folgt $d = \pm 1$ ($|c\tau + d|^2 \neq 0, d \in \mathbb{Z}$), $a = \pm 1$ ($ad - bc = 1$). Somit folgt $\tau' = g(\tau) = \tau + b$ analog zu T. Aber wegen $\tau, \tau' \in D, \tau \neq \tau'$ folgt entweder $b = 1, \mathrm{Re}\ \tau = -\frac{1}{2}, \mathrm{Re}\ \tau' = \frac{1}{2}$ oder $b = -1, \mathrm{Re}\ \tau = \frac{1}{2}, \mathrm{Re}\ \tau' = -\frac{1}{2}$, in beiden Fällen jedoch $\tau, \tau' \in \partial D$.
Für $c = 1$ existieren wegen $|c\tau + d| \leq 1$ drei Möglichkeiten:

(i) $|\tau| = 1, d = 0$,
(ii) $\tau = \eta, d = 1$,
(iii) $\tau = -\overline{\eta}, d = -1$.

Mehr Möglichkeiten existieren nicht, denn es gilt $|\tau| \geq 1$ und für $c = 1$ ist wegen $|c\tau + d| \leq 1$ nichts anderes als Fall (i) oder, in den beiden Punkten η und $-\overline{\eta}$ Fall (ii) und (iii), möglich. Nun gilt für alle Möglichkeiten bereits $\tau \in \partial D$. Der Fall $c = -1$ kann durch Umdrehen der Vorzeichen von a, b, c, d zum Fall $c = 1$ zurückgeführt werden. Daraus folgt die Behauptung.

Zu 2.: Zum Beweis der zweiten Behauptung führen wir die Fallunterscheidung, die wir gerade genannt haben, durch.
Zu (i): Aus $c = 1, d = 0$ folgt mit $ad - bc = 1$ sofort $b = -1$, somit $g(\tau) = \frac{a\tau - 1}{\tau} = a - \frac{1}{\tau}$. Wenn nun $\tau \notin \{\eta, -\overline{\eta}\}$ ist , dann muss $a = 0$ (denn $-\frac{1}{\tau}$ wechselt wegen $|\tau| = 1$ wegen $-\frac{1}{\tau} = \frac{1 \cdot (-x+iy)}{(-x-iy)(-x+iy)} = \frac{-x+iy}{|\tau|^2}$ lediglich das Vorzeichen des Realteils von τ; somit $a = 0$, denn für $a \neq 0$ wäre $g(\tau) \notin D$) und somit $g = S$ sein. Falls $\tau = \eta$, dann kann auch $a = -1$ und somit $g = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (ST)^2$ sein. Es ergibt sich $(ST)^2(\eta) = \frac{-\eta-1}{\eta} = -1 - \frac{1}{\eta} = -1 + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \eta$. Falls $\tau = -\overline{\eta}$, dann kann auch $a = 1$ und $g = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = TS$. Genau wie eben ergibt sich $TS(-\overline{\eta}) = -\overline{\eta}$.
Zu (ii): Aus $c = 1, d = 1$ folgt mit $ad - bc = 1$ sofort $b = a - 1$. Dann ist $g(\eta) = \frac{a\eta + a - 1}{\eta + 1} = \frac{a(\eta+1) - 1}{\eta + 1} = a - \frac{1}{\eta+1}$ und es ergibt sich $a \in \{0, 1\}$. Für $a = 0$ ergibt sich $g = ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $ST(\eta) = \eta$, für $a = 1$ ergibt sich $g(\eta) = -\overline{\eta}$.
Zu (iii): Der dritte Fall kann analog behandelt werden, die Ergebnisse kommen genau wie im Fall (ii) heraus, insbesondere $(TS)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $(TS)^2(-\overline{\eta}) = -\overline{\eta}$.

Somit ergeben sich $Stab_{\mathbb{G}}(\eta) = \{1, ST, (ST)^2\}$, $Stab_{\mathbb{G}}(-\overline{\eta}) = \{1, TS, (TS)^2\}$. $Stab_{\mathbb{G}}(i) = \{1, S\}$ folgt sofort aus (i). $Stab_{\mathbb{G}}(\tau) = \{1\}$, wenn $\tau \notin \{i, \eta, -\overline{\eta}\}$ folgt aus dem Beweis, da hier genau die Elemente $\tau \in D$ festgestellt wurden, die durch die Operation wieder auf D abgebildet werden. Nur sie können einen nicht-trivialen Stabilisator besitzen.

Zu 3.: Zu zeigen ist $\mathbb{G}' = \mathbb{G}$. Dazu sei $g \in \mathbb{G}$ und $\tau_0 \in \mathring{D}$. Da D nach 1. Fundamentalbereich der Operation von $\mathbb{G}'$ auf $\mathbb{H}$ ist, muss ein Element $g' \in \mathbb{G}'$ existieren mit $g'(g(\tau_0)) \in D$. Da aber τ_0 im Inneren liegt, darf es nicht zu einem anderen Element aus D äquivalent sein. Somit muss gelten $g'g(\tau_0) = \pm E(\tau_0)$ und somit $g'g = \pm E$. Also muss $g \in \mathbb{G}'$ sein. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

(1.10) Bemerkung
Mit Satz (1.9) folgt die Behauptung von Bemerkung (1.7) an den Kern der Operation, da $Core(\mathbb{H}) = \cap_{\tau\in\mathbb{H}} Stab_{\mathbb{G}}(\tau)$. $\pm 1 \in Core(\mathbb{H})$, aber es gilt $Stab_{\mathbb{G}}(\tau) = \{1\}$ für $\tau \in D \setminus \{i, \eta, -\overline{\eta}\}$. ◇

— *Die Modulform* —

Entsprechend dem Vortragstitel folgt jetzt die Definition der Modulform.

(1.11) Definition
Sei k eine positive, gerade, ganze Zahl, d.h. $k = 2n, n \in \mathbb{N}$. Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ wird *Modulform* genannt, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. $$f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k f(\tau) \;\forall\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

2. f besitzt eine Potenzreihen-Entwicklung in $q = e^{2\pi i\tau}$, das heißt f ist holomorph im Unendlichen $\tau = i\infty$. ◇

(1.12) Satz
Aus der ersten Bedingung der vorhergehenden Definition folgt, dass
$f(\tau) = f(\tau + b)$ für alle $b \in \mathbb{Z}$ ist. Also ist f 1-periodisch. ◇

Beweis
Die erste Bedingung gilt für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, also auch für $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es ergibt sich $f(\frac{\tau+b}{1}) = f(\tau+b) = f(\tau) = f(\tau)(1)^k$. □

Nach Satz (1.12) dürfen wir unter Zuhilfenahme von Satz (H.7) die Definition der Modulform in eine etwas einfachere Schreibweise bringen.

(1.13) Folgerung
Sei $q = e^{2\pi i\tau}, \tau \in \mathbb{H}$.
Eine Modulform vom Gewicht k ist eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, die für $|q| < 1$ eine Darstellung als Summe

$$f(\tau) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r q^r,$$

hat und die die Gleichung

$$f\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^k f(\tau)$$

erfüllt. ◇

Beweis
Nach Satz (1.12) ist f periodisch mit Periodenlänge 1. Also existiert nach Satz (H.7) eine Fourier-Reihenentwicklung in $q = e^{2\pi i\tau} : f(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_r q^r$. Nach der 2. Bedingung von Definition (1.11) gilt sogar $a_r = 0$ für $r < 0$. Daraus folgt die angegebene Reihe.
Nun ist noch zu zeigen, dass auch die erste Bedingung von Definition (1.11) erfüllt wird. Wir wissen, dass $\mathbb{G}$ von S und T erzeugt wird, somit kann jede Matrix $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ als Verkettung der Matrizen S und T geschrieben werden, das heißt es gilt $g = S^{a_1}T^{b_1}\dots S^{a_n}T^{b_n}$ für alle $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $a_i, b_i \in \{0, 1, -1\}$ für alle $1 \le i \le n$, $n \in \mathbb{N}$. Wegen der 1-Periodizität von $q = e^{2\pi i\tau}$ (Setze $\tau + 1$ in q ein. Es ergibt sich $q = e^{2\pi i(\tau+1)} = e^{2\pi i\tau}e^{2\pi i} = e^{2\pi i\tau} \cdot 1$. Daraus folgt die 1-Periodizität) gilt $f(T\tau) = f(\tau)$. $f(S\tau) = f(-\frac{1}{\tau}) = \tau^k f(\tau)$ ist eine Voraussetzung, zudem können wir wegen $S^{-1} = S$ die Beschränkung $a_i \in \{0, 1\}$ setzen.
Wir beweisen nun mittels Induktion nach n, dass für beliebige $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ die Gleichung für Modulformen erfüllt ist:
(IA) $n = 1$: Folgt für S, T, T^{-1} sofort. Zudem ist $f((TS)(\tau)) = f(T(S(\tau))) = f(S(\tau))$, $f((T^{-1}S(\tau))) = f(S(\tau))$ korrekt.
Fehlt noch $f((ST)(\tau)) = f(S(T(\tau))) = f(-\frac{1}{T\tau}) = (T\tau)^k f(T\tau) = (T\tau)^k f(\tau) = (\tau+1)^k f(\tau)$. $ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ergibt in der Gleichung für Modulformen $(\tau+1)^k f(\tau)$.
Also folgt auch (ST) richtig. (ST^{-1}) folgt analog.
(IV) Bis zur Länge n sei die Gleichung der Modulformen mit den Bedingungen aus Folgerung (1.13) erfüllt.
(IS) Für g gilt die Induktionsvoraussetzung. Wir müssen zeigen, dass dann auch für

Sg, Tg und $T^{-1}g$ die Gleichung für Modulformen gilt. Nun ist
$f(Sg(\tau)) = f(-\frac{1}{g(\tau)}) = g(\tau)^k f(g(\tau)) \overset{(IV)}{=} \left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)^k (c\tau+d)^k f(\tau) = (a\tau+b)^k f(\tau)$.
Wegen $Sg = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$ ist die Gleichung für Modulformen auch für Sg erfüllt. Für Tg gilt $f(T(g(\tau))) = f(g(\tau))$, genauso für T^{-1}. Also erfüllt Tg die Gleichung für Modulformen. Daraus folgt die Behauptung. □

(1.14) Bemerkung
Konvergiert die Reihe

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r q^r$$

für alle q mit $|q| < 1$, so konvergiert die Reihe für $q = e^{2\pi i \tau}$ genau dann, wenn τ in der oberen Halbebene liegt. ◇

Beweis
Die Bedingung an die Konvergenz wurde gestellt zu $|q| < 1$. Nun gilt $q = e^{2\pi i \tau}$, $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$, somit insbesondere $y > 0$. Es folgt

$$|q| = |e^{2\pi i \tau}| = |e^{2\pi i(x+iy)}| = |e^{2\pi i x - 2\pi y}| = \underbrace{|e^{-2\pi y}|}_{<1} \cdot \underbrace{|e^{2\pi i x}|}_{=1} < 1.$$

□

Zum Abschluss dieses Kapitels zwei Beispiele für Modulformen. Die Beweise werden in den nächsten Vorträgen folgen.

(1.15) Beispiel

1. Sei $k = 2n$, $1 \neq n \in \mathbb{N}$, $\tau \in \mathbb{H}$. Die Reihe

   $$G_k(\tau) = \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(m\tau + n)^k}$$

   heißt Eisensteinreihe vom Gewicht k und ist eine Modulform.

2. Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein gerades, unimodulares Gitter, Φ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{H}$, $q = e^{2\pi i \tau}$. Die Funktion

   $$\vartheta_\Gamma(\tau) := \sum_{x \in \Gamma} q^{\frac{1}{2}\Phi(x,x)}$$

   heißt Thetafunktion und ist eine Modulform vom Gewicht $\frac{n}{2}$. ◇

§2 Die Poissonsche Summenformel

Im Folgenden werden wir die Poissonsche Summenformel aufstellen und beweisen. Sie wird in den nächsten Vorträgen verwendet werden, um zu zeigen, dass gewisse Funktionen (unter anderem die gerade definierte Thetafunktion) Modulformen sind. Zu diesem Zweck definieren wir die Fourier-Transformierte einer Funktion f und betrachten zunächst die Funktionen, die in der Summenformel verwendet werden, genauer.

(2.1) Definition
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine integrierbare Funktion. Dann existiert eine Fourier-Transformierte $\hat{f}$ von f definiert durch

$$\hat{f}(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \ \Phi(x,y)} \mathrm{dx}.$$

◇

Hierbei bezeichnet Φ das Standardskalarprodukt.

(2.2) Lemma
Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter. Definiere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \mathrm{dx} < \infty$,
2. Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum, so konvergiert die Reihe $\sum_{x \in \Gamma} |f(x+u)|$ gleichmäßig auf K,
3. Die Reihe $\sum_{y \in \Gamma^*} |\hat{f}(y)|$ ist absolut konvergent.

Dann gilt:

1. Es existiert eine Fourier-Transformierte $\hat{f}(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \Phi(x,y)}$ von f.
2. Die Funktion $F(u) := \sum_{x \in \Gamma} f(x+u)$ ist stetig auf $\mathbb{R}^n$. ◇

Beweis
Dass $\hat{f}(y)$ existiert ist klar, denn da f stetig ist, folgt sofort, dass f integrierbar ist.
$F(u) := \sum_{x \in \Gamma} f(x+u)$ ist stetig auf $\mathbb{R}^n$: Folgt mit der 2. Bedingung an die Funktion aus Analysis III. □

Damit haben wir alles zusammen, um die Poissonsche Summenformel angeben und beweisen zu können.

(2.3) Satz (Poissonsche Summenformel)
Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die die Bedingungen aus Lemma (2.2) erfüllt. Dann gilt

$$\sum_{x\in\Gamma} f(x) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma)} \sum_{y\in\Gamma^*} \hat{f}(y).$$

◇

Beweis
Zur Vereinfachung nehmen wir zunächst an, dass $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ ist. Die oben definierte Funktion $F(u) := \sum_{x\in\Gamma} f(x+u)$ ist nach dem Lemma stetig und $\mathbb{Z}^n$-periodisch in u, d.h. $F(u+y) = F(u)\ \forall\ y \in \mathbb{Z}^n$ (denn für $y \in \mathbb{Z}^n$ gilt aufgrund der absoluten Konvergenz der Reihe $F(u+y) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} f(x+u+y) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} f((x+y)+u)$. Nun ist $(x+y) \in \mathbb{Z}^n$, deshalb kann y in der Reihe weggelassen werden. Es folgt $F(u+y) = F(u)$). Somit kann F in eine Fourierreihe

$$\sum_{y\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i\Phi(u,y)} a(y)$$

mit $a(y) := \int_{[0,1]^n} F(t)e^{-2\pi i\Phi(y,t)}\mathrm{d}t$ entwickelt werden (Gestalt der Reihe folgt aus (H.6) und (H.7)).
Wir zeigen nun, dass $a(y) = \hat{f}(y)$ ist. Aus Bedingung 3 erhalten wir dann (da hier $\mathbb{Z}^n = \Gamma^*$ ist und wegen $\Phi(u,y) \in \mathbb{R}$ gilt, dass $|e^{2\pi i\Phi(u,y)}| = 1$ ist) die absolut gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe, welche (nach Satz (H.7)) gegen die stetige Funktion F konvergiert. Wir erhalten dann

$$F(0) = \sum_{x\in\Gamma} f(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(y),$$

welche wegen $\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n) = 1$ genau die Summationsformel ist.

Zeige also, dass $a(y) = \hat{f}(y)$. Es ist

$$\begin{aligned} a(y) &= \int\limits_{[0,1]^n} \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} f(x+t)e^{-2\pi i\Phi(t,y)}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} \int\limits_{[0,1]^n} f(x+t)e^{-2\pi i\Phi((t+x),y)}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} \int\limits_{x+[0,1]^n} f(t')e^{-2\pi i\Phi(t',y)}\mathrm{d}t' = \hat{f}(y). \end{aligned}$$

Zur Gleichheit der ersten Umformung sei gesagt, dass $e^{-2\pi i\Phi(t,y)} = e^{-2\pi i\Phi((t+x),y)}$, da $e^{-2\pi i\Phi((t+x),y)} = e^{-2\pi i\Phi(t,y)}e^{-2\pi i\Phi(x,y)}$. Nun sind $x, y \in \mathbb{Z}^n$, somit $\Phi(x,y) \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt $e^{-2\pi i\Phi(x,y)} = 1$. Demnach haben wir in der ersten Umformung lediglich mit 1 multipliziert.
Daraus folgt die Behauptung für $\Gamma = \mathbb{Z}^n$.

Im allgemeinen Fall ist $\Gamma = M \cdot \mathbb{Z}^n$, wobei $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist. Wir wissen, dass $\Gamma^* = (M^{tr})^{-1} \cdot \mathbb{Z}^n$ ist. Also folgt aus obigem Beweis

$$\sum_{x\in\Gamma} f(x) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} f(Mx) := \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} f_M(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}_M(y),$$

wobei $\hat{f}_M$ dann gleich

$$\hat{f}_M(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(Mt)e^{-2\pi i\Phi(t,y)}\mathrm{dt}$$

$$= \frac{1}{\det M}\int_{R^n} f(t')e^{-2\pi i\Phi((M^{-1}t'),y)}\mathrm{dt}',\ (t = M^{-1}t')$$

$$= \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma)}\hat{f}((M^{tr})^{-1}y),\ (\Phi(M^{-1}t',y) = \Phi(t',(M^{tr})^{-1}y))$$

ist. Um die Gleichheit der letzten Umformung zu zeigen schreibe das Skalarprodukt $\Phi(x,y) = x^{tr} \cdot y$ als Matrizenprodukt. Mit Assoziativität folgt die Gleichheit.

Wegen $\Gamma^* = (M^t)^{-1} \cdot \mathbb{Z}^n$ folgt

$$\sum_{x\in\Gamma} f(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}_M(y) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma)}\sum_{y\in\Gamma^*} \hat{f}(y)$$

die Poissonsche Summenformel. □

Wir haben also die Poissonsche Summenformel bewiesen. Als letzten Teil in diesem Vortrag betrachten wir eine Funktion mit besonderen Eigenschaften hinsichtlich der soeben bewiesenen Summenformel.

(2.4) Beispiel
Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto e^{-\pi\Phi(x,x)}$ ist gleich ihrer Fourier-Transformierten, das heißt
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\Phi(x,x)} e^{-2\pi i\Phi(x,y)} \mathrm{dx} = e^{-\pi\Phi(y,y)} \ \forall\, y \in \mathbb{R}^n.$$
◇

Beweis
Man kann sich einfach klarmachen, dass es reicht, die Formel für $n = 1$ zu zeigen (schreibe dazu $x = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^{tr}$, y analog und spalte das Integral in die eindimensionalen Teile auf). Es ist $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi ixy} \mathrm{dx}$ für $y \in \mathbb{R}$ die Fouriertransformation von $f(x)$. Partielle Integration mit $g(x) = e^{-2\pi ixy}$, $h'(x) = -2\pi x e^{-\pi x^2}$ zeigt, dass
$$\hat{f}'(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} -2\pi i x e^{-\pi x^2} e^{-2\pi ixy} \mathrm{dx} = -2\pi y \hat{f}(y).$$
Mit dieser Gleichung folgt, dass die Ableitung des Quotienten
$$\frac{\hat{f}(y)}{e^{-\pi y^2}}$$
0 ergibt. Also gibt es eine Konstante c, sodass $\hat{f}(y) = c e^{-\pi y^2}\ \forall y \in \mathbb{R}$. Also auch für
$$\hat{f}(0) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} \mathrm{dx} = 1$$
nach der Fehlerfunktion ($\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\tau^2} \mathrm{d}\tau$; substituiere $x' := \sqrt{\pi} x$). Also ist $c = 1$, daraus folgt die Behauptung. □