Thetafunktionen mit sphärischen Koeffizienten

Jonas Kaszián, Julian Teske

9. Juni 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Diese Ausarbeitung basiert auf dem Buch Lattices and Codes von Wolfgang Ebeling. Ziel der vorgestellten Theorie ist es, Thetareihen zu modifizieren, um ihr Gewicht zu erhöhen. Dies wird durch die Verwendung sphärischer Polynome als Koeffizienten erreicht.

In Kapitel 2 wird zunächst eine besser handhabbare Darstellung von sphärischen Polynomen berechnet und in Kapitel 3 wird das Transformationsverhalten der modifizierten Thetafunktionen unter der Modulgruppe analysiert.

Abschließend wird in Kapitel 4 ein Beispiel für eine Thetareihe mit sphärischem Koeffizienten angegeben.

2 Charakterisierung von sphärischen Polynomen

Definition 2.1 (Sphärische/harmonische Polynome) *Ein Polynom $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ heißt sphärisch/harmonisch falls es die Laplacegleichung*

$$\Delta P := \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} x = 0$$

erfüllt. Hierbei bezeichnet man $\Delta := \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ als den Laplaceoperator.

Satz 2.2 (Darstellungssatz für sphärische Polynome) *Die sphärischen Polynome sind genau die Linearkombinationen von Polynomen der Form $P = (\xi, x)^r$ für ein $\xi \in \mathbb{C}^n$ mit $(\xi, \xi) = 0$ falls $r \geq 2$.*

Bemerkung 1 Hierbei bezeichnet $(x, y) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ für $x, y \in \mathbb{C}^n$ die $\mathbb{C}$-bilineare Fortsetzung des Standardskalarproduktes des $\mathbb{R}^n$. □

Beweis (Rückrichtung) Sei $P = (\xi, x)^r$ mit $\xi \in \mathbb{C}^n$. Für $r \leq 1$ ist die Aussage offensichtlich. Sei also $r \geq 2$.

$$\Delta P = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(\sum_j \xi_j x_j \right)^r = r(r-1) \left(\sum_i \xi_i^2 \right) (\xi, x)^{r-2} = 0$$

■

Um die Hinrichtung zu beweisen, wird die $\mathbb{C}$-Vektorraumstruktur des Polynomrings $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ ausgenutzt. Dazu benötigen wir das folgende

Lemma 1 *Für $f, g \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ definiert*

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_K f\bar{g}dx$$

mit der Einheitskugel $K = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \|x\| \leq 1\}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$. $\square$

Beweis Nur die positive Definitheit ist nicht offensichtlich. Sei $f \neq 0$, dann gibt es ein $x_0 \in K$ mit $f(x_0) \neq 0$. Ansonsten ist f ein Polynom mit unendlich vielen Nullstellen, also nach dem Fundamentalsatz der Algebra konstant null.
Wegen der Stetigkeit von Polynomen findet sich ein Kreis der in K liegt und auf dem sich $f \cdot \bar{f} = |f|^2$ nach unten beschränken lässt. Dieser Kreis liefert einen Beitrag zum Integral $\langle f, f \rangle = \int\limits_K f\bar{f}dx$ über die nichtnegative Funktion $|f|^2$. $\blacksquare$

Im Buch Gitter and Codes führt Ebeling den Beweis mithilfe der Theorie der Differentialformen insbesondere dem Satz von Stokes. Die Argumente des Beweises kommen jedoch auch mit dem Ingegralsatz von Gauß aus, der ein Spezialfall des Satzes von Stokes ist. Um den Beweis leichter zugänglich zu machen, wird er daher hier mit dem Satz von Gauß geführt, der gewöhnlich in Analysis III mithilfe von Maß- und Integrationstheorie bewiesen wird.

Satz 1 (Integralsatz von Gauß) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Omega \subset U$ kompakt mit abschnittsweise glattem Rand $\partial\Omega$. Es bezeichne ν das äußere Einheitsnormalenfeld auf $\partial\Omega$. Ist $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, so gilt:*

$$\int\limits_\Omega div(F)dx = \int\limits_\Omega \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dx = \int\limits_{\partial\Omega} (\nu, F)dS \qquad \square$$

Lemma 2 (Hilfsidentitäten) *Sein $f, g \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ homogen vom Grad r.*

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = r \cdot f \tag{2.1}$$

$$r \int\limits_{\partial K} f dS = \int\limits_K \Delta f dx \tag{2.2}$$

$$\int_K \Delta f dx = r(r+n) \int_K f dx \tag{2.3}$$

$$\Delta(fg) = f\Delta g + 2\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} + g\Delta f \tag{2.4}$$

□

Beweis Gleichung 2.1 lässt sich direkt aus der Homogenität von f folgern. Nach Definition der Homogenität gilt für alle $h \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(hx) = h^r f(x)$$

Differenzieren nach h mit Kettenregel liefert:

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(hx) \cdot x_i = rh^{r-1} f(x)$$

Setzt man schließlich $h = 1$:

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot x_i = rf(x)$$

Der Beweis von Gleichung 2.2 erfolgt mit dem Satz von Gauß und Gleichung 2.1:

$$\begin{aligned} r\int_{\partial K} f dS &= \int_{\partial K} \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i dS \\ &= \int_{\partial K} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right), (x_1, \dots, x_n) \right) dS \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Summe als formales Skalarprodukt im Sinne von Bemerkung 1 umgeschrieben. Auf der Einheitssphäre stimmt das äußere Einheitsnormalenfeld mit dem Ortsvektor jedes Punktes überein, sodass wir $\nu = x = (x_1, \dots, x_n)$ identifizieren können. Fassen wir nun das Gradientenfeld von f, das durch $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ gegeben ist, als Vektorfeld auf, so können wir den Satz von Gauß anwenden.

$$\int_{\partial K} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right), \nu \right) dS = \int_K \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} dx = \int_K \Delta f dx$$

Um die Gleichung 2.3 zu beweisen nutzen wir die Tatsache, dass auf der Einheitssphäre die Beträge aller Punkte $x \in \partial K$ normiert sind: $\|x\| = \sum_i x_i^2 = (x, x) = 1$ Daher gilt:

$$r\int_{\partial K} f dS = r\int_{\partial K} f(x,x) dS = r\int_{\partial K} (fx, x) dS$$

Im letzten Schritt wurde die Funktion $f(x) \in \mathbb{R}$ mittels Linearität in das Skalarprodukt gezogen. Man identifiziert wieder $\nu = x$ und wendet den Satz von Gauß mit $fx = (fx_1, \ldots, fx_n)$ als Vektorfeld an.

$$\begin{aligned}
r \int\limits_{\partial K} (fx, \nu) dS &= r \int\limits_K \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (fx_i) dx \\
&= r \int\limits_K \left(nf + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i \right) dx \\
&= r \int\limits_K (nf + rf)\, dx
\end{aligned}$$

Das letzte Gleichzeichen gilt wegen Identität 2.1. Insgesamt erhalten wir also:

$$r \int\limits_{\partial K} f dS = r(n+r) \int\limits_K f dx$$

Und nun folgt die gesuchte Identität mit Gleichung 2.2. Die letzte Identität ergibt sich direkt aus der Produktregel für Ableitungen.

$$\Delta(fg) = \sum_i \frac{\partial^2 (fg)}{\partial x_i^2} = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} g + 2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} \qquad \blacksquare$$

2.1 Hinrichtung des Beweises des Darstellungssatzes

Wegen der Linearität des Laplaceoperators bilden die sphärischen Polynome einen Untervektorraum S des $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$. Definiere $S_r \subset S$ als den Unterraum der sphärischen Polynome, die homogen vom Grad r sind. Jedes Polynom lässt sich schreiben als eindeutige Summe von homogenen Polynomen. Da der Laplaceoperator den Betrag des Grades jedes Mononoms um genau 2 reduziert, muss wegen der linearen Unabhängigkeit der Mononome gelten, dass ein Polynom genau dann harmonisch ist, wenn jeder seiner homogenen Summanden sphärisch ist. Also ist S die Vektorraumsumme der Räume S_r.

Mit der bereits bewiesenen Rückrichtung des Darstellungssatzes ist bekannt, dass das Vektorraumerzeugnis

$$A_r := \langle \{ (\xi, x)^r \,|\, \xi \in \mathbb{C}^n,\, (\xi, \xi) = 0 \text{ falls } r \geq 2 \} \rangle$$

in diesem Unterraum enthalten ist. Definiere A als die Vektorraumsumme aller A_r. Um Satz 2.2 per Widerspruch zu beweisen, nehme man an an, dass dieses Erzeugnis für ein $r \in \mathbb{N}$ nicht der ganze Unterraum der sphärischen Polynome ist. Nach dieser Annahme ist das orthogonale Komplement $A_r^\perp$ in S_r nicht leer. Sei also $P \in A_r^\perp$.

Der Beweis unterteilt sich in die folgenden Schritte.

1. $P(\xi) = 0$ für alle $\xi \in \mathbb{C}^n$ mit $(\xi, \xi) = 0$
2. P wird geteilt von $\delta = \sum_i x_i^2$
3. P steht orthogonal zu allen homogenen Polynomen echt kleineren Homogenitätsgrades
4. Insgesamt folgt $P = 0$

2.1.1 Schritt 1

Sei $g = (\xi, x)^r$ mit $\xi \in \mathbb{C}^n$ und $(\xi, \xi) = 0$. Da die komplexe Konjugation ein $\mathbb{C}$-Automorphismus ist, gilt dann aber auch $(\bar{\xi}, \bar{\xi}) = 0$, also gilt nach Voraussetzung $P \perp \bar{g}$. Dann gilt:

$$0 = \langle P, \bar{g} \rangle = \int\limits_K Pg dx$$

Nach Gleichung 2.3 wissen wir, dass wir das Integral nur um den konstanten Faktor $2r(2r+n)$ korrigieren müssen, wenn wir den Laplaceoperator einfügen. Diese Konstante ist echt größer als Null solange das Polynom P (und damit g) nicht vom Grad $r = 0$ sind. Es ist leicht ersichtlich, dass P homogen vom Grad $r \geq 2$ sein muss, da alle homogenen Polynome vom Grad ≤ 1 in A liegen. Also folgt mit Gleichungen 2.3 und 2.4:

$$0 = \int\limits_K Pg dx = const. \int\limits_K \Delta(Pg) dx = const. \int\limits_K \sum_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx$$

(zu beachten: $\Delta P = \Delta g = 0$ nach Annahme)

Da partielle Ableitungen kommutieren sind auch alle Partiellen Ableitungen von P und g harmonisch, sodass man wieder ein Integral über das Produkt zweier harmonischer

Funktionen hat, sodass sich Identitäten 2.2 und 2.4 erneut anwenden lassen. Führt man diese Operation iterativ durch, so gelangt man nach r Schritten zu:

$$0 = const. \int_K \sum_{i_1,\dots,i_r} \frac{\partial^r P}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}} \frac{\partial^r g}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}} dx \tag{2.5}$$

Da P und g Grad r haben, ist der Integrand konstant, sodass sich der Integrand aus dem Integral ziehen lässt. Das Integral liefert wiederum nur eine Konstante. Formt man nun weiter um:

$$\frac{\partial^r g}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}} = r!\xi_{i_1} \dots \xi_{i_r}$$

Und wendet man Gleichung 2.1 r mal auf P an, so erhält man:

$$r!P = \sum_{i_1,\dots,i_r} \frac{\partial^r P}{\partial_{i_1} \dots \partial_{i_r}} x_{i_1} \dots x_{i_r}$$

Setzten wir diese Identitäten in Gleichung 2.5 ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 &= const. \sum_{i_1,\dots,i_r} \frac{\partial^r P}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}} \frac{\partial^r g}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}} \\ &= const. \sum_{i_1,\dots,i_r} \frac{\partial^r P}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}} \xi_{i_1} \dots \xi_{i_r} \\ &= const. P(\xi) \end{aligned}$$

Also gilt $P(\xi) = 0$ für alle $\xi \in \mathbb{C}$ mit $(\xi, \xi) = 0$.

2.1.2 Schritt 2

Die Aussage gilt im Fall $n = 1$, wie Polynomdivision zeigt. Sei also $n \geq 2$. Für diesen Beweisschritt wird der starke Hilbertsche Nullstellensatz benötigt. Die elementaren Begriffe der Idealtheorie werden in der Computeralgebra eingeführt und hier vorausgesetzt. Zum Anfang werden weitere benötigte Begriffe definiert.

Definition 2.3 (Radikalideal) *Sei I ein Ideal über einem kommutativen Ring R so bezeichnet man mit*

$$\sqrt{I} := \{a \in R | \exists n \in \mathbb{N}, a^n \in I\}$$

Das Radikalideal von I.

Definition 2.4 (Vanishing set) *Sei I ein Ideal über einem Polynomring* $K[X_1, \ldots, X_n]$, *für einen Körper K, dann ist das Vanishing set*

$$\mathcal{V}(I) := \{y \in K^n | p(y) = 0, \forall p \in I\}$$

Satz 2.5 (Starker Hilbertscher Nullstellensatz) *Seien I und J Ideale über dem Ring* $K[X_1, \ldots, X_n]$ *wobei K ein algebraisch abgeschlossener Körper ist. Dann gilt:*

$$\mathcal{V}(I) \subseteq \mathcal{V}(J) \Rightarrow \sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$$

Außerdem sei $\delta = (x, x)$ und $\langle\delta\rangle$ bezeichne das von δ erzeugte Ideal. Im Beweisschritt 1 wurde gezeigt, dass $\mathcal{V}(\langle\delta\rangle) = \{\xi \in \mathbb{R}^n | (\xi, \xi) = 0\} \subseteq \mathcal{V}(\langle P\rangle)$ und mit dem starken Hilbertschen Nullstellensatz folgt nun $\sqrt{\langle P\rangle} \subseteq \sqrt{\langle\delta\rangle}$.

Man kann zeigen, dass das Radikalideal von $\langle\delta\rangle$ der Schnitt über alle von Primteilern von δ erzeugten Ideale ist. Die Primteiler sind bis auf Reihenfolge und Assoziiertheit eindeutig bestimmt. δ kann maximal 2 Primteiler besitzen, da sein Grad vom Betrag 2 ist. Diese Primteiler können nicht identisch sein, wie der folgende Ansatz zeigt.

Sei $q = q_0 + \sum_i q_i x_i$ Primteiler von δ. Angenommen $q^2 = \delta$. Dann führt der Koeffizientenvergleich nach x_1x_2,x_1^2 und x_2^2 auf die unlösbaren Gleichungen $q_1q_2 = 0$, $q_1^2 = 1$ und $q_2^2 = 1$. Daher muss gelten $\langle\delta\rangle = \sqrt{\langle\delta\rangle}$.

Insgesamt gilt dann:

$$P \in \sqrt{\langle P\rangle} \subseteq \sqrt{\langle\delta\rangle} = \langle\delta\rangle$$

Also gilt $\delta | P$.

2.1.3 Schritt 3

Die Aussage lässt sich mithilfe der Vollständigen Induktion über den Grad von P zeigen.

Induktionsbehauptung für $r \in \mathbb{N}$ mit $r \geq 2$:
Sei $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ harmonisch und homogen von Grad r. Sei $f \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ harmonisch von einem echt kleineren Grad als r, dann gilt $P \perp f$.

Es gilt nach Identitäten 2.3 und 2.4:

$$\langle P, f \rangle = \int_K P f dx = const. \int_K \left(f \Delta P + 2 \sum_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} + P \Delta f \right) dx$$

Die komplexe Konjugation kann man weglassen, da $\bar{f}$ homogen vom gleichen Grad ist. Es gilt nach Annahme $\Delta P = 0$. Im Induktionsbegin ($r = 2$, f linear oder konstant) sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}$ gleich 0 oder homogene Polynome erster Ordnung und damit ungerade Funktionen, deren Integral über ein Symmetrisches Integrationsgebiet verschwindet.

In den Induktionsschritten verschwindet das Integral über diese Terme nach Induktionsannahme, da die partiellen Ableitungen von P ebenfalls harmonische homogene Polynome vom Grad $r - 1$ sind und die partiellen Ableitungen von f wieder homogen. Führt man dieses Argument r mal aus, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\langle P, f \rangle &= const. \int_K P \Delta f dx \\
&= const. \int_K P \Delta^r f dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

Die Konstante, um die man das Integral korrigieren muss, ist immer positiv und beschränkt, da sie nur von der Dimension n und der Summe der Homogenitätsgrade der beiden Polynome abhängt. Diese ist immer größer oder gleich r.

2.1.4 Schritt 4

Aus Beweisschritt 2 wissen wir, dass $P = \delta f$ für ein homogenes Polynom f. Da f einen echt kleineren Grad als P besitzt gilt aber $P \perp f$ nach Beweisschritt 3. Es lässt sich folgende Umformung machen.

$$
\begin{aligned}
0 = \langle P, f \rangle &= \int\limits_K P\bar{f}dx \\
&= const. \int\limits_{\partial K} P\bar{f}dS \\
&= const. \int\limits_{\partial K} \delta f\bar{f}dS \\
&\stackrel{\delta=1}{=} const. \int\limits_{\partial k} f\bar{f}dS \\
&= const. \int\limits_K f\bar{f}dx \\
&= const. \langle f, f \rangle = const. \|f\|
\end{aligned}
$$

Bei dieser Umformung zieht man das Integral mit den Identitäten 2.2 und 2.3 auf den Rand der Einheitskugel zurück, wo $\delta = 1$ gilt. Nun erhält man aber $f = 0$ und daher $P = \delta f = 0$. Damit ist der Darstellungssatz bewiesen.

3 Transformationsverhalten unter der Modulgruppe

Definition 3.1 *Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter, $z \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt, P ein sphärisches, homogenes Polynom vom Grad r, und $\tau \in \mathbb{H}$.*

$$\vartheta_{z+\Gamma,P}(\tau) := \sum_{x \in z+\Gamma} P(x) e^{\pi i \tau x^2} = \sum_{x \in \Gamma} P(x+z) e^{\pi i \tau (x+z)^2}$$

Bemerkung 3.2 *Analog zu den bisher definierten Thetareihen lässt sich zeigen, dass die Funktion $\vartheta_{z+\Gamma,P}$ holomorph auf der oberen Halbebene ist. Die Konvergenz der Summe erhält man dabei indem man die Summe über das Gitter mit dem entsprechenden Integral über $\mathbb{R}^n$ abschätzt. Das polynomielle Wachstum der Koeffizienten wird dabei vom exponentiell fallenden Term dominiert. Nach Definition sind $\vartheta_{z_1+\Gamma,P}$ und $\vartheta_{z_2+\Gamma,P}$ identisch, falls $z_1 \equiv z_2 (mod \Gamma)$.*

Lemma 3.3 *Die Fouriertransformation der Funktion*

$$f(x) = (\xi, (x+z))^r e^{\pi i (\frac{-1}{\tau})(x+z)^2}$$

mit $\tau \in \mathbb{H}$ und $\xi, z \in \mathbb{R}^n$, ist gegeben durch

$$\hat{f}(y) = \left(\sqrt{\frac{\tau}{i}} \right)^{n+2r} \left(\frac{\xi \cdot y}{i} \right)^r e^{2\pi i (z,y)} e^{i \tau \pi y^2}$$

Beweis In Lemma 2.1 des Buches Lattices and Codes wurde bereits gezeigt

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i (x,y)} dx = e^{-\pi y^2}$$

Mit der Substitutionsregel folgt daraus

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi (\frac{-i}{\tau}) x^2} e^{-2\pi i (x,y)} dx = \left(\sqrt{\frac{\tau}{i}} \right)^n e^{i \tau \pi y^2}$$

Wendet man nun den Differentialoperator $D := \left(\frac{-1}{2\pi i}\sum_j \xi_j \frac{\partial}{\partial y_j}\right)^r$ an, so erhält man

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{\pi(\frac{-i}{\tau})x^2}(\xi,x)^r e^{-2\pi i(x,y)}dx = \left(\sqrt{\frac{\tau}{i}}\right)^{n+2r}\left(\frac{(\xi,y)}{i}\right)^r e^{i\tau\pi y^2}$$

Führt man in der ursprünglichen Funktion vor der Fouriertransformation die Substitution $x \mapsto x+z$ durch, so erhält man

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\xi,x+z)^r e^{\pi(\frac{-i}{\tau})(x+z)^2}e^{-2\pi i(x,y)}dx\\
=&\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\xi,x)^r e^{\pi(\frac{-i}{\tau})(x)^2}e^{-2\pi i(x-z,y)}dx\\
=&e^{2\pi i(z,y)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\xi,x)^r e^{\pi(\frac{-i}{\tau})(x)^2}e^{-2\pi i(x,y)}dx\\
=&\left(\sqrt{\frac{\tau}{i}}\right)^{n+2r}\left(\frac{(\xi,y)}{i}\right)^r e^{2\pi i(z,y)}e^{i\tau\pi y^2}
\end{aligned}$$

■

Lemma 3.4 *Für die oben definierte Thetafunktion gilt die Identität*

$$\vartheta_{z+\Gamma,P}\left(\frac{-1}{\tau}\right) = \left(\sqrt{\frac{\tau}{i}}\right)^{n+2r} i^{-r}\frac{1}{vol(\mathbb{R}^n/\Gamma)}\sum_{y\in\Gamma^*}P(y)e^{2\pi i(y,z)}e^{\pi i\tau y^2}$$

Beweis Nach dem Darstellungssatz ist P eine Linearkombination von Polynomen der Form $(\xi,x)^r$. Dann ist $\vartheta_{z+\Gamma,P}$ eine endliche Summe mit Summanden der Form

$$\sum_{x\in\Gamma}(\xi,(x+z))^r e^{\pi i\tau(x+z)^2}$$

Diese lassen sich mittels Poissonsummation und Fouriertransformierten aus Lemma 3.3 umformen

$$\begin{aligned}
&\sum_{x\in\Gamma}(\xi,(x+z))^r e^{\pi i\tau(x+z)^2}\\
=&\left(\sqrt{\frac{\tau}{i}}\right)^{n+2r} i^{-r}\frac{1}{vol(\mathbb{R}^n/\Gamma)}\sum_{y\in\Gamma^*}(\xi,y)^r e^{2\pi i(y,z)}e^{\pi i\tau y^2}
\end{aligned}$$

■

Bemerkung 3.5 *Für den Rest der Ausarbeitung gelten die Folgenden Annahmen.* $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ *sei ein gerades Gitter, in einem Raum gerader Dimension n. P sei sphärisch und homogen vom Grad r. Definiere* $k := \frac{n}{2} + r$*. Es gilt also insbesondere* $\Gamma \subset \Gamma^*$.

Definition 3.6 (Operation der $SL_2(\mathbb{Z})$) *Die Gruppe* $SL_2(\mathbb{Z})$ *opertiert auf der Menge der Abbildungen* $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ *und der oberen Halbebene* $\mathbb{H}$ *durch*

$$(f, \tau) \mapsto (f|_k A)(\tau) := f(A\tau)(c\tau + d)^{-k}$$

für ein $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ *und* $k \in \mathbb{Z}$.

Im Unterkapitel 2.2 des Buches Lattices and Codes wurde bereits gezeigt, dass die Modulgruppe $SL_2(\mathbb{Z})\ mod(\pm 1)$ von den Matrizen

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad und \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Daher wird nun das Transformationsverhalten unter diesen Erzeugern analysiert.

Lemma 3.7 *Für Thetafunktionen wie in Definition 3.1 mit den Annahmen aus Bemerkung 3.5 gilt für* $\rho \in \Gamma^*$ *und* $\nu(\Gamma) := vol(\mathbb{R}^n/\Gamma)$:

$$\vartheta_{\rho+\Gamma,P}(\tau + 1) = \vartheta_{\rho+\Gamma,P}(\tau)e^{\pi i \rho^2} \tag{3.1}$$

$$\vartheta_{\rho+\Gamma,P}\left(\frac{-1}{\tau}\right) = \frac{1}{\nu(\Gamma)}\left(\frac{\tau}{i}\right)^k i^{-r} \sum_{\sigma\in\Gamma^*/\Gamma} e^{2\pi i\sigma\rho}\vartheta_{\sigma+\Gamma,P}(\tau) \tag{3.2}$$

Beweis Die erste Gleichung folgt mit der Tatsache, dass nach Annahme $\rho x \in \mathbb{Z}$ und $x^2 \in 2\,\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}\vartheta_{\rho+\Gamma,P}(\tau + 1) &= \sum_{x\in\Gamma} P(x+\rho)e^{\pi i(\tau+1)(x+\rho)^2} \\ &= \sum_{x\in\Gamma} P(x+\rho)e^{\pi i(\tau(x+\rho)^2 + x^2 + 2x\rho + \rho^2)} \\ &= \vartheta_{\rho+\Gamma,P}(\tau)e^{\pi i\rho^2}\end{aligned}$$

Für die zweite Gleichung benutzen wir Lemma 3.4 und die Umformung der Summe

$$\sum_{y\in\Gamma^*} f(y) = \sum_{\sigma\in\Gamma^*/\Gamma}\ \sum_{\substack{x\in\Gamma^* \\ x\equiv\sigma\ (mod\Gamma)}} f(x) = \sum_{\sigma\in\Gamma^*/\Gamma}\ \sum_{x\in\Gamma} f(x+\sigma)$$

wobei f eine generische Funktion sei.

$$\vartheta_{\rho+\Gamma,P}\left(\frac{-1}{\tau}\right) = \left(\sqrt{\frac{\tau}{i}}\right)^{n+2r} i^{-r}\frac{1}{\nu(\Gamma)}\sum_{y\in\Gamma^*} P(y)e^{2\pi i(y,\rho)}e^{\pi i\tau y^2}$$

$$= \left(\sqrt{\frac{\tau}{i}}\right)^{n+2r} i^{-r}\frac{1}{\nu(\Gamma)}\sum_{\sigma\in\Gamma^*/\Gamma}\ \sum_{x\in\Gamma} P(x+\sigma)e^{2\pi i(x+\sigma,\rho)}e^{\pi i\tau(x+\sigma)^2}$$

$$= \left(\sqrt{\frac{\tau}{i}}\right)^{n+2r} i^{-r}\frac{1}{\nu(\Gamma)}\sum_{\sigma\in\Gamma^*/\Gamma} e^{2\pi i(\sigma,\rho)}\sum_{x\in\Gamma} P(x+\sigma)e^{\pi i\tau(x+\sigma)^2}$$

Wobei erneut benutzt wurde, dass $\rho x \in \mathbb{Z}$. ■

4 Beispiel einer Thetafunktion mit sphärischen Koeffizienten

Um den Inhalt der Seminararbeit zu verdeutlichen wird nun ein Beispiel für eine Thetafunktion gegeben.

Nach dem Darstellungssatz ist $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 (x_1 + ix_2)^4$ ein sphärisches Polynom. Es wird das Gitter $\Gamma = \sqrt{2}\,\mathbb{Z}^2$ verwendet. Für ein $\tau \in \mathbb{H}$ ist die zugehörige Thetafunktion gegeben durch:

$$\begin{aligned}\vartheta_{\Gamma,P}(\tau) &= \sum_{x\in\Gamma} P(x) e^{\pi i \tau (x,x)} \\ &= \sum_{x\in\mathbb{Z}^2} (x_1 + ix_2)^4 e^{2\pi i \tau (x,x)}\end{aligned}$$

Diese Funktion soll nun in Potenzen von $q = e^{2\pi i \tau}$ entwickelt werden. Es bezeichne a_n den n-ten Entwicklungskoeffizienten für $n \in \mathbb{N}_0$.

$$\vartheta_{\Gamma,P}(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n q^{(x,x)}$$

Die Berechnung der ersten Koeffizienten liefert:

$$a_0 = (0 + i \cdot 0)^4 = 0$$

Also ist $\vartheta_{\Gamma,P}$ eine Spitzenform. Da P eine gerade Funktion ist, kann ein Faktor 2 eingefügt werden um nur noch $\mathbb{Z}\ mod(-1)$ berücksichtigen zu müssen.

$$a_1 = 2\left[\,(1 + i \cdot 0)^4 + (0 + i)^4\,\right] = 4$$

$$\begin{aligned}a_2 &= 2\left[\,(1+i)^4 + (1-i)^4\,\right] \\ &= 2\left[\,(\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi i})^4 + (\sqrt{2}e^{\frac{7}{4}\pi i})^4\,\right] \\ &= 2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^4 (e^{\pi i} + e^{7\pi i}) = -16\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_4 &= 2\left[\,(2+i\cdot 0)^4+(0+2i)^4\,\right] \\
&= 4\cdot 2^4 = 2^6
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich

$$
\vartheta_{\Gamma,P}(\tau) = 0 + 4q - 16q^2 + 0q^3 + 2^6 q^4 + \sum_{n=5}^{\infty} a_n q^n
$$

5 Genauere Betrachtung des Transformationsverhaltens

Wir finden eine explizite Beschreibung der Operation für Elemente der Modulgruppe auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum $\langle \theta_{\rho+\Gamma,P} | \rho \in \Gamma^* \rangle$.

Lemma 5.1 *Sind $\rho \in \Gamma^*, A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$, so gilt für $c = 0$*

$$\theta_{\rho+\Gamma,P}|_k A = \frac{1}{d^{n/2}} e^{\pi i a b \rho^2} \theta_{a\rho+\Gamma,P}$$

und für $c \neq 0$

$$\theta_{\rho+\Gamma,P}|_k A = \frac{1}{\nu(\Gamma) c^{n/2} i^{k+r}} \sum_{\sigma \in \Gamma^*/\Gamma} \left(e^{-\pi i b (d\rho^2 + 2\rho\sigma)} \sum_{\substack{\lambda \in \Gamma^*/c\Gamma \\ \lambda = \rho + d\sigma \mod \Gamma}} e^{\pi i \frac{a}{c} \lambda^2} \right) \theta_{\sigma+\Gamma,P}.$$

Beweis Nutzt man im Fall $c = 0$ aus, dass $a = d \in \{\pm 1\}$ und dass eine Operation vorliegt, so ist die Gleichung eine leichte Verallgemeinerung von (3.1). Insbesondere gilt damit

$$\begin{aligned} \theta_{\rho+\Gamma,P}(a^2\tau + ab) &= d^k \theta_{\rho+\Gamma,P}|_k A(\tau) \\ &= d^r e^{\pi i a b \rho^2} \theta_{a\rho+\Gamma,P}(\tau) \end{aligned}$$

Sei also nun $c \neq 0$. Indem wir bei Bedarf zunächst mit $-I_2$ operieren (und dies mit dem ersten Fall behandeln), können wir ohne Einschränkung $c > 0$ annehmen. Es gilt

$$\frac{a}{c} - \frac{1}{c(c\tau + d))} = \frac{a(c\tau + d) - (ad - bc)}{c(c\tau + d)} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

Es gilt stets

$$\begin{aligned}
\theta_{\rho+\Gamma,P}(\tau) &= \sum_{x\in\Gamma} P(x+\rho)e^{i\pi\tau(x+\rho)^2} \\
&= \sum_{y\in\Gamma/c\Gamma}\sum_{x\in c\Gamma} P(x+y+\rho)e^{i\pi\tau(x+y+\rho)^2} = \sum_{\substack{\lambda\in\Gamma^*/c\Gamma \\ \lambda=\rho \mod \Gamma}} \theta_{\lambda+c\Gamma,P}(\tau).
\end{aligned}$$

Die einzelnen Summanden behandeln wir nun mit Hilfe des ersten Teils und den bereits gezeigten Aussagen aus (3.1):

$$\begin{aligned}
\theta_{\lambda+c\Gamma,P}\left(\frac{a}{c}-\frac{1}{c(c\tau+d)}\right) &= \sum_{x\in c\Gamma} P(x+\lambda)e^{\pi i(x+\lambda)^2\left(\frac{a}{c}-\frac{1}{c(c\tau+d)}\right)} \\
&= e^{\pi i\frac{a}{c}\lambda^2}\sum_{x\in c\Gamma} P(x+\lambda)e^{\pi i(x+\lambda)^2\frac{-1}{c(c\tau+d)}}\underbrace{e^{\pi i\frac{a}{c}(x^2+2\lambda x)}}_{=1,\text{ da }\lambda\in\Gamma^*} \\
&= e^{\pi i\frac{a}{c}\lambda^2}\theta_{\lambda+c\Gamma,P}\left(\frac{-1}{c(c\tau+d)}\right) \\
&= \frac{c^k}{\nu(c\Gamma)i^{k+r}}(c\tau+d)^k\sum_{\sigma\in(c\Gamma)^*/c\Gamma} e^{\pi i(\frac{a}{c}\lambda^2+2\sigma\lambda)}\theta_{\sigma+c\Gamma}(c^2\tau+cd) \\
&\overset{cd\in\mathbb{Z}}{=} \frac{c^k}{\nu(c\Gamma)i^{k+r}}(c\tau+d)^k\sum_{\sigma\in(c\Gamma)^*/c\Gamma} e^{\pi i(\frac{a}{c}\lambda^2+2\sigma\lambda+cd\sigma^2)}\theta_{\sigma+c\Gamma}(c^2\tau) \\
&\overset{s:=\sigma c}{=} \frac{c^k}{\nu(c\Gamma)i^{k+r}}(c\tau+d)^k\sum_{s\in\Gamma^*/c^2\Gamma} e^{\pi i(\frac{a}{c}\lambda^2+2\frac{s}{c}\lambda+\frac{d}{c}s^2)}\theta_{\frac{s}{c}+c\Gamma}(c^2\tau) \\
&= \frac{c^k}{\nu(\Gamma)c^n i^{k+r}}(c\tau+d)^k\sum_{s\in\Gamma^*/c^2\Gamma} e^{\pi i(\frac{a}{c}\lambda^2+2\frac{s}{c}\lambda+\frac{d}{c}s^2)}c^{-r}\theta_{s+c^2\Gamma}(\tau),
\end{aligned}$$

wobei bei der Substitution zu $s := \sigma c$ eingeht, dass $(c\Gamma)^* = c^{-1}\Gamma^*$ und danach $\nu(c\Gamma) = c^n\nu(\Gamma)$.

Nutzen wir nun die Bezeichnung

$$G(\sigma) := \frac{1}{\nu(\Gamma)c^{n/2}i^{k+r}}\sum_{\substack{\lambda\in\Gamma^*/c\Gamma \\ \lambda=\rho \mod \Gamma}} e^{\frac{\pi i}{c}(a\lambda^2+2\sigma\lambda+d\sigma^2)},$$

so gilt

$$
\begin{aligned}
(\theta_{\rho+\Gamma,P}|_k A)(\tau) &= \sum_{\substack{\lambda\in\Gamma^*/c\Gamma\\ \lambda=\rho \mod \Gamma}} \theta_{\lambda+c\Gamma,P}|_k A(\tau)\\
&= \sum_{\substack{\lambda\in\Gamma^*/c\Gamma\\ \lambda=\rho \mod \Gamma}} \frac{1}{\nu(\Gamma)c^{n/2}i^{k+r}} \sum_{\sigma\in\Gamma^*/c^2\Gamma} e^{\pi i(\frac{a}{c}\lambda^2+2\frac{\sigma}{c}\lambda+\frac{d}{c}\sigma^2)}\theta_{\sigma+c^2\Gamma}(\tau)\\
&= \sum_{\sigma\in\Gamma^*/c^2\Gamma} G(\sigma)\theta_{\sigma+c^2\Gamma}(\tau).
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der elementaren Umformung

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{c}\lambda^2+2\frac{\sigma}{c}\lambda+\frac{d}{c}\sigma^2 &= \frac{a}{c}\lambda^2+\frac{2(ad-bc)}{c}\sigma\rho+\frac{d}{c}\sigma^2\\
&= \frac{a}{c}(\lambda+d\sigma)^2-\frac{ad^2}{c}\sigma^2-2b\sigma\rho+\frac{d}{c}\sigma^2\\
&= \frac{a}{c}(\lambda+d\sigma)^2-2b\sigma\rho+\frac{d(1-ad)}{c}\sigma^2\\
&= \frac{a}{c}(\lambda+d\sigma)^2-2b\sigma\rho-bd\sigma^2
\end{aligned}
$$

erhalten wir

$$
\begin{aligned}
G(\sigma) &= \frac{1}{\nu(\Gamma)c^{n/2}i^{k+r}}e^{\pi i(-bd\sigma^2-2b\sigma\rho)} \sum_{\substack{\lambda\in\Gamma^*/c\Gamma\\ \lambda=\rho \mod \Gamma}} e^{\pi i\frac{a}{c}(\lambda+d\sigma)^2}\\
&= \frac{1}{\nu(\Gamma)c^{n/2}i^{k+r}}e^{\pi i(-bd\sigma^2-2b\sigma\rho)} \sum_{\substack{\lambda\in\Gamma^*/c\Gamma\\ \lambda=\rho+d\sigma \mod \Gamma}} e^{\pi i\frac{a}{c}\lambda^2}.
\end{aligned}
$$

Somit hängt $G(\sigma)$ nur von der Restklasse $\sigma+\Gamma$ ab und wir können die entsprechenden Summen von Thetafunktionen zu einer zusammenfügen:

$$
\begin{aligned}
(\theta_{\rho+\Gamma,P}|_k A)(\tau) &= \sum_{\sigma\in\Gamma^*/c^2\Gamma} G(\sigma)\theta_{\sigma+c^2\Gamma}(\tau)\\
&= \sum_{\sigma_1\in\Gamma^*/\Gamma}\sum_{\sigma_2\in\Gamma/c^2\Gamma} G(\sigma_1)\theta_{\sigma_1+\sigma_2+c^2\Gamma}(\tau)\\
&= \sum_{\sigma\in\Gamma^*/\Gamma} G(\sigma)\theta_{\sigma+\Gamma}(\tau).
\end{aligned}
$$

Dies ist die Behauptung für $c\neq 0$. ■

Da es Relationen zwischen $\theta_{\rho+\Gamma,P}$ für $\rho \in \Gamma^*$ geben kann, ist die Dimension $\dim\langle\theta_{\rho+\Gamma,P}|\rho \in \Gamma^*\rangle$ im Allgemeinen echt kleiner als $|\Gamma^*/\Gamma|$, da z.B. $\theta_{\Gamma,P} = 0$ für P ungeraden Grades.

Wir betrachten weiterhin gerade, ganzzahlige Gitter gerader Dimension.

Definition 5.2 *Die Stufe eines Gitters ist definiert als*

$$\min\{N \in \mathbb{N}\,|N\gamma^2 \in 2\,\mathbb{Z} \quad \forall\gamma \in \Gamma^*\}.$$

Lemma 5.3 *Sei N die Stufe des Gitters Γ. Dann gilt $N\Gamma^* \subset \Gamma$.*

Beweis Es existiert $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sodass $\Gamma = M\,\mathbb{Z}^n$ und die Gram-Matrix des Gitters ist $A = M^{\mathrm{tr}}M$. Das duale Gitter ist dann gegeben durch $\Gamma^* = (M^{-1})^{\mathrm{tr}}\,\mathbb{Z}^n$ und dessen Gram-Matrix ist $M^{-1}(M^{-1})^{\mathrm{tr}} = A^{-1}$.

Durch Polarisierung erhalten wir für $x, y \in \Gamma^*$ nach Definition der Stufe

$$N(x,y) = \frac{1}{2}\underbrace{N((x+y,x+y)-(x,x)-(y,y))}_{\in 2\,\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z},$$

also ist NA^{-1} ganzzahlig. Somit ist

$$M^{-1}(N\Gamma^*) = NM^{-1}(M^{-1})^{\mathrm{tr}}\,\mathbb{Z}^n = NA^{-1}\,\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{Z}^n,$$

woraus die Behauptung $N\Gamma^* \subset M\,\mathbb{Z}^n = \Gamma$ folgt. ∎

Wir behalten die Notation des vorigen Beweises bei.

Lemma 5.4 *Sei $\Delta = (-1)^{n/2}disc(\Gamma)$ und N die Stufe von Γ. Dann sind NA^{-1} und ΔA^{-1} ganzzahlig mit geraden Diagonaleinträgen und $N|\Delta|N^n$.*

Beweis Im vorigen Beweis haben wir die erste Aussage zu NA^{-1} bereits gezeigt. Es ist jeder Eintrag von $\mathrm{disc}(\Gamma)A^{-1} = \det(A)A^{-1}$ nach der Cramerschen Regel ein Polynom in den Einträgen von A, also ganzzahlig. Die Diagonaleinträge sind gerade, da sie Determinanten von symmetrischen, gerade Matrizen sind (Untermatrizen von A, die durch Streichen derselben Zeile und Spalte entstehen).

Wegen der Wahl von N als das Minimum und da genau die Vielfachen von N alle auftretenden Nenner aufheben, gilt somit $N|\det(A)$. Andererseits gilt $N^n \cdot \det(A)^{-1} = \det(NA^{-1}) \in \mathbb{Z}^n$, also $N^n \in \det(A)\,\mathbb{Z}^n$ bzw. $\det(A)|N^n$. ∎

Wir betrachten die Summe aus $G(\sigma)$ wie am Ende des Beweises und ersetzen λ durch $\lambda + c\mu$ mit $\mu \in \Gamma^*, c\mu \in \Gamma$:

$$\begin{aligned}
S :=& \sum_{\substack{\lambda \in \Gamma^*/c\Gamma \\ \lambda = \rho + d\sigma \mod \Gamma}} e^{\pi i \frac{a}{c} \lambda^2} \\
=& \sum_{\substack{\lambda \in \Gamma^*/c\Gamma \\ \lambda = \rho + d\sigma \mod \Gamma}} e^{\pi i \frac{a}{c} (\lambda + c\mu)^2} \\
=& e^{\pi i a c \mu^2} \sum_{\substack{\lambda \in \Gamma^*/c\Gamma \\ \lambda = \rho + d\sigma \mod \Gamma}} e^{\pi i (\frac{a}{c} \lambda^2 + 2a\lambda\mu)} \\
=& e^{\pi i a c \mu^2} \sum_{\substack{\lambda \in \Gamma^*/c\Gamma \\ \lambda = \rho + d\sigma \mod \Gamma}} e^{\pi i \frac{a}{c} \lambda^2} e^{\pi i 2a(\rho + d\sigma)\mu} \\
=& e^{\pi i (ac\mu^2 + 2a(\rho + d\sigma)\mu)} S.
\end{aligned}$$

Somit gilt $S = 0$ oder $(ac\mu^2 + 2a(\rho + d\sigma)\mu) \in 2\,\mathbb{Z}$ für alle $\mu \in \Gamma^*$ mit $c\mu \in \Gamma$.

Sei nun N die Stufe von Γ und sei $N|c$. Dann folgt aus $S \neq 0$ stets

$$\begin{aligned}
& (\underbrace{ac\mu^2}_{\in 2\,\mathbb{Z}} + 2a(\rho + d\sigma)\mu) \in 2\,\mathbb{Z} \quad \forall \mu \in \Gamma^* \\
\Leftrightarrow \quad & a(\rho + d\sigma)\mu \in \mathbb{Z} \quad \forall \mu \in \Gamma^* \\
\Leftrightarrow \quad & a\rho + \underbrace{ad}_{=1+bc} \sigma \in \Gamma^{**} = \Gamma \\
\Leftrightarrow \quad & a\rho + \sigma \in \Gamma.
\end{aligned}$$

Somit können wir beim Berechnen der Operation die Summe über σ zugunsten $\sigma = -a\rho$ wegfallen lassen, da alle anderen Summanden verschwinden und dieser Summand unabhängig von Verschiebungen um $\gamma \in \Gamma$ ist (s.u). Wir bestimmen $G(\gamma - a\rho)$ bis auf die konstanten Faktoren am Anfang:

$$\begin{aligned}
&e^{\pi i(-bd\sigma^2-2b\sigma\rho)} \sum_{\substack{\lambda\in\Gamma^*/c\Gamma\\ \lambda=\rho+d\sigma \mod \Gamma}} e^{\pi i\frac{a}{c}\lambda^2}\\
=&e^{\pi ib(-d(\gamma-a\rho)^2-2(\gamma-a\rho)\rho)} \sum_{\substack{\lambda\in\Gamma^*/c\Gamma\\ \lambda=\rho+d(\gamma-a\rho) \mod \Gamma}} e^{\pi i\frac{a}{c}\lambda^2}\\
\overset{\rho\gamma,\gamma^2\in\mathbb{Z}}{=}&e^{\pi iab(-da+2)\rho^2} \sum_{\substack{\lambda\in\Gamma^*/c\Gamma\\ \lambda=-bc\rho \mod \Gamma}} e^{\pi i\frac{a}{c}\lambda^2}\\
\overset{c\rho\in\Gamma}{=}&e^{\pi iab(1-bc)\rho^2} \sum_{\lambda\in\Gamma/c\Gamma} e^{\pi i\frac{a}{c}\lambda^2} = e^{\pi iab\rho^2} \sum_{\lambda\in\Gamma/c\Gamma} e^{\pi i\frac{a}{c}\lambda^2}.
\end{aligned}$$

Somit haben wir eine übersichtliche Form für die Operation bestimmt, sofern $N|c$. Mittels $\theta_{-a\rho+\Gamma,P} = (-1)^r\theta_{a\rho+\Gamma,P}$ folgt dann, dass dann die Matrizen lediglich durch Multiplikation mit einem Faktor operieren:

$$\begin{aligned}
&(\theta_{\rho+\Gamma,P}|_kA)(\tau)\\
&= \sum_{\substack{\sigma\in\Gamma^*/\Gamma\\ \sigma=-a\rho \mod \Gamma}} G(\sigma)\theta_{\sigma+\Gamma,P}(\tau)\\
&= G(-a\rho)\theta_{-a\rho+\Gamma,P}(\tau)\\
&= \frac{(-1)^r}{\nu(\Gamma)c^{n/2}i^{k+r}} e^{\pi iab\rho^2}\left(\sum_{\lambda\in\Gamma/c\Gamma} e^{\pi i\frac{a}{c}\lambda^2}\right)\theta_{a\rho+\Gamma,P}(\tau).
\end{aligned}$$

Korollar 5.5 *Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein gerades ganzzahliges Gitter der Stufe N, n gerade , $\rho \in \Gamma^*$, $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$, d.h. $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ und $N|c$. Dann gilt*

$$(\theta_{\rho+\Gamma,P}|_kA)(\tau) = \epsilon(A)e^{\pi iab\rho^2}\theta_{a\rho+\Gamma,P}(\tau),$$

wobei

$$\epsilon(A) = \begin{cases} \frac{1}{\nu(\Gamma)(ic)^{n/2}}\sum_{\lambda\in\Gamma/c\Gamma} e^{\pi i\frac{a}{c}\lambda^2}, & c \neq 0\\ d^{-n/2}, & c = 0.\end{cases}$$

Wir definieren die folgenden Untergruppen der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$:

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}); N|c \right\}$$
$$\Gamma_1(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}); a \equiv d \equiv 1 \mod N, N|c \right\}$$
$$\Gamma(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}); \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mod N \right\}.$$

Alle haben endlichen Index in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \supset \Gamma_0(N) \supset \Gamma_1(N) \supset \Gamma(N)$, da die Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(N)$ der Kern der Reduktionsabbildung modulo N ist, die endliches Bild hat.

Wegen des gerade gezeigten Korollars ist insbesondere

$$\theta_{\Gamma,P}|_k A = \epsilon(A)\theta_{\Gamma,P}$$

und somit $\epsilon : \Gamma_0(N) \to \mathbb{C}^*$ ein Gruppenhomomorphismus, da es nicht-verschwindende Thetafunktionen gibt. Solche Gruppenhomomorphismen heißen *Charaktere*.

Wendet man auf $\theta_{\Gamma,P}|_k A = \theta_{\Gamma,P}|_k(A \cdot S^{-1})|_k S$ zweimal Lemma (5.1) an, so erhält man ein Reziprozitätsgesetz für Gausssche Summen.

Korollar 5.6 *Ist $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$ mit $c, d \neq 0$, so gilt*

$$\epsilon(A) = d^{-n/2} \sum_{\lambda \in \Gamma/d\Gamma} e^{\pi i \frac{b}{d} \lambda^2}.$$

Ein Blick in die Definition von $\epsilon(A)$ in Korollar (5,5) liefert die folgende Aussage.

Lemma 5.7 *Ist $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$, so gilt für alle $l \in \mathbb{Z}$*

$$\epsilon\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \epsilon\left(\begin{pmatrix} a & b + la \\ c & d + lc \end{pmatrix}\right).$$

Wir kombinieren die letzten zwei Aussagen, um (für $d \neq 0$) Gausssche Summen

$$G(b, d) := \sum_{\lambda \in \Gamma/d\Gamma} e^{\pi i \frac{b}{d} \lambda^2}$$

zu analysieren.

Lemma 5.8 *Sei* $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$ *mit* $d, c \neq 0$. *Dann ist die Gausssche Summe* $G(b,d)$ *eine rationale Zahl und* $G(b,d) = G(1,d)$.

Beweis Da Γ gerade ist, besteht aus einer Summe von d-ten Einheitswurzeln, liegt also in $\mathbb{Q}(\zeta)$, wobei $\zeta = e^{2\pi i/d}$ eine primitive d-te Einheitswurzel ist. Korollar (5.6) liefert $G(b,d) = d^{n/2}\epsilon(A)$.

Wenden wir zusätzlich Lemma (5.7) an, so folgt mit der Teilerfremdheit von c und d

$$G(b,d) = d^{n/2}\epsilon(A) = d^{n/2}(d+lc)^{-n/2} \sum_{\lambda \in \Gamma/(d+lc)\Gamma} e^{\pi i \frac{b+la}{(d+lc)} \lambda^2}$$

für alle ganzen Zahlen l. Damit gilt auch $G(b,d) \in \mathbb{Q}(e^{\pi i/(d+lc)})$. Wiederum wegen der Teilerfremdheit von c und d existiert $l \in \mathbb{Z}$, sodass d und $d + lc$ teilerfremd sind.

Für dieses $l \in \mathbb{Z}$ gilt (z.B. via Galois-Theorie oder durch Dimensionsüberlegungen) $\mathbb{Q}(\zeta) \cap \mathbb{Q}(\zeta_l) = \mathbb{Q}$ und somit ist $G(b,d)$ rational. Somit ist $G(b,d)$ invariant unter allen Automorphismen von $\mathbb{Q}(\zeta)$, insbesondere folgt mit $\zeta \mapsto \zeta^b$ daraus $G(1,d) = G(b,d)$. ∎

Insgesamt haben wir also gezeigt, dass $\epsilon(A)$ für $A \in \Gamma_0(N)$ nur von d und mit Lemma (5.7) (durch Matrixwahl mit $c = N$) sogar nur von $d \mod N$ abhängt.

Damit gilt $\epsilon(\Gamma_1(N)) = 1$ und ϵ faktorisiert zu einem rationalwertigen Charakter von $\Gamma_0(N)/\Gamma_1(N) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*, A \mapsto (d \mod N)$. Also definiert ϵ einen Charakter $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to \mathbb{Q}^*$.

Er ist durch die Bilder $\chi(p), 2 \neq p \in \mathbb{P}$ mit $\mathrm{ggt}(p,N) = 1$ eindeutig bestimmt, da $2|N$. Sei dazu $pt + uN = 1$ und entsprechend $A = \left(\begin{smallmatrix} p & 1 \\ uN & t \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$. Dann gilt mittels Übergang zum Faktorring nach dem von p erzeugten Ideal

$$\begin{aligned}
\chi(p)\nu(\Gamma)(iuN)^{n/2} &= \sum_{\lambda \in \Gamma/uN\Gamma} e^{\pi i \frac{p}{uN} \lambda^2} \\
&\equiv \left(\sum_{\lambda \in \Gamma/uN\Gamma} e^{\pi i \frac{1}{uN} \lambda^2} \right)^p \mod p \\
&\equiv \left(\epsilon \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ uN & pt \end{pmatrix} \right) \nu(\Gamma)(iuN)^{n/2} \right)^p \mod p
\end{aligned}$$

Es gilt $\epsilon\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ uN & pt \end{smallmatrix}\right)\right) = 1$ wegen $pt \equiv 1 \mod N$, weiterhin $uN \equiv -1 \mod p$ und $\nu(\Gamma) = \mathrm{disc}(\Gamma)^{1/2}$, also

$$\begin{aligned} \chi(p) &\equiv \left(\nu(\Gamma)(iuN)^{n/2}\right)^{p-1} \mod p \\ &\equiv (\mathrm{disc}(-1)^n)^{\frac{p-1}{2}} \mod p. \end{aligned}$$

Setzen wir wieder $\Delta = (-1)^{n/2}\mathrm{disc}(\Gamma)$, so gilt

$$\chi(p) \equiv \Delta^{\frac{p-1}{2}} \mod p \equiv \left(\frac{\Delta}{p}\right) \mod p$$

Mit der üblichen Notation des multiplikativen Aufbaus des Jacobi-Symbols folgt somit insgesamt

Theorem 1 *Es gilt*

$$\begin{aligned} \theta_{\rho+\Gamma,P}|_k A &= \theta_{\rho+\Gamma,P} \qquad \forall A \in \Gamma(N), \\ \theta_{\Gamma,P}|_k A &= \left(\frac{\Delta}{d}\right)\theta_{\Gamma,P} \quad \forall A \in \Gamma_0(N). \end{aligned}$$

□