Die Eisensteinreihen

Vortrag zum Seminar *Gitter und Codes*, 28.04.2015

Simon Berger

Die folgende Ausarbeitung hat das Buch *"Lattices and Codes"* [1] von Wolfgang Ebeling zur Grundlage.

§1 Einleitung

Die Eisensteinreihen wurden im 19. Jahrhundert von dem deutschen Mathematiker Ferdinand Gotthold Max Eisenstein entdeckt [2] sind einen wichtiger Bestandteil in der Theorie der Modulformen, da sie eine explizite Konstruktion für solche Formen liefern.
Nach einer kurzen Wiederholung einiger Definitionen und Sätze im zweiten Kapitel, beschäftigt sich das dritte Kapitel zunächst mit der Einführung der Eisensteinreihen und dem Nachweis der Modulform-Eigenschaft unter Zuhilfenahme einiger Hilfssätze.
Im vierten Kapitel wird anschließend näher auf die Potenzreihendarstellung und den Zusammenhang mit den Bernoulli-Zahlen eingegangen. Außerdem werden einige Beispiele zum expliziten Ausrechnen der Reihen angegeben.

§2 Wiederholung

Im Zuge des Vortrags werden einige Aussagen aus dem Bereich der Funktionentheorie, sowie früheren Seminarthemen benötigt, die an dieser Stelle kurz ohne Beweis wiederholt, bzw. eingeführt werden sollen.

(2.1) Bemerkung
Die Gruppe

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \{g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1\}$$

operiert auf der oberen Halbebene

$$\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid Im(\tau) > 0\} \subset \mathbb{C}$$

durch gebrochene lineare Transformationen

$$\tau \to g(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Die Faktorgruppe $\mathbb{G} := SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ heißt Modulgruppe und wird erzeugt von $S := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $T := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Weiterhin bildet

$$D = \{\tau \in \mathbb{C} \mid |\tau| \geq 1, |Re(\tau)| \leq \frac{1}{2}\} \subset \mathbb{H}$$

einen Fundamentalbereich von $\mathbb{H}$, d.h. jedes Element in $\mathbb{H}$ liegt unter der Operation von $\mathbb{G}$ auf einer Bahn mit einem Element aus D und liegen zwei Elemente aus D auf einer Bahn, so befinden sie sich auf dem Rand ∂D von D.

(2.2) Definition
Sei $k \in \mathbb{Z}$ eine gerade, positive, ganze Zahl. Eine holomorphe Funktion $f \colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ heißt Modulform von Gewicht k, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau)$ *für alle* $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$

(ii) f hat eine Fourierreihendarstellung der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ mit $q = e^{2\pi i \tau}$, d.h. f ist holomorph in unendlich $\tau = i\infty$

(2.3) Satz von Weierstraß *[3, Kap. III, Satz (5.1)]*
Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f_n : U \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, holomorphe Funktionen. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiere lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$. Dann ist f ebenfalls holomorph und für jedes $k \in \mathbb{N}$ konvergiert die Funktionenfolge $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\geq 1}$ der k-ten Ableitungen ebenfalls lokal gleichmäßig gegen $f^{(k)}$.

§3 Die Eisensteinreihen

Im dritten Kapitel dieser Ausarbeitung beschäftigen wir uns nun mit der tatsächlichen Einführung der Eisensteinreihe. Zunächst also die Definition:

(3.1) Definition (Eisensteinreihe)
Sei $k \in 2\mathbb{Z}$, $k > 2$. Die Reihe

$$G_k : \mathbb{H} \to \mathbb{C}, \tau \mapsto \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(m\tau+n)^k}$$

heißt Eisensteinreihe vom Index k.

Dass es sich hierbei tatsächlich um eine wohldefinierte Funktion handelt (also dass die Reihe konvergiert) wird an späterer Stelle im Zuge des Nachweises der Holomorphie gezeigt. Widmen wir uns nun dem grundlegenden Satz, dessen Beweis in diesem Kapitel geführt werden soll:

(3.2) Satz
Die Eisensteinreihe $G_k(\tau)$ (k gerade, k > 2) ist eine Modulform vom Gewicht k.

Beweis (Anfang):
Wir betrachten zunächst das Verhalten von $G_k(\tau)$ unter der Gruppenoperation von $\mathbb{G}$.

Mit der Definition der Reihe ergibt unter der Anwendung von $T := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{G}$:

$$\begin{aligned} G_k(T\cdot\tau) &= G_k(\tau+1) \\ &= \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(m(\tau+1)+n)^k} \\ &= \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(m\tau+(m+n))^k} \\ &= G_k(\tau). \end{aligned}$$

Also gilt Invarianz bzgl. der Anwendung von T. Für $S := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{G}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} G_k(S \cdot \tau) &= G_k\left(-\frac{1}{\tau}\right) \\ &= \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{\left(-\frac{m}{\tau}+n\right)^k} \\ &= \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{\left(\frac{n\tau-m}{\tau}\right)^k} \\ &= \tau^k \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(n\tau-m)^k} \\ &= \tau^k G_k(\tau). \end{aligned}$$

Da nach dem Vortrag über Modulformen S und T die Gruppe $\mathbb{G}$ erzeugen, erhält man insgesamt die erste Bedingung

$$G_k\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k G_k(\tau) \quad \text{für alle} \quad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

Zu zeigen bleibt noch, dass G_k holomorph auf der oberen Halbebene ist und eine Fourierreihendarstellung in der gewünschten Form hat. Für diese Aussagen benötigen wir zunächst das folgende Lemma. Der Beweis wird an späterer Stelle beendet.

(3.3) Lemma
Sei L ein Gitter in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{\substack{\gamma\in L \\ \gamma\neq 0}} \frac{1}{|\gamma|^\sigma}$$

für alle $\sigma > 2$.

Beweis:
Sei (ω_1, ω_2) mit $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ eine Gitterbasis von L.
Sei weiterhin $P_m, m \geq 1$ das Parallelogramm mit den Eckpunkten $\pm m\omega_1 \pm m\omega_2$ (also

der Rand der konvexen Hülle um diese vier Punkte, vgl. Abb. 1), dann gilt:

$$\begin{aligned}|P_m \cap L| =& |\{\pm m\omega_1 + a\omega_2 \mid a \in \mathbb{Z}, -m < a < m\} \uplus \{a\omega_1 \pm m\omega_2 \mid a \in \mathbb{Z}, -m < a < m\} \\ & \uplus \{\pm m\omega_1 \pm m\omega_2\}| \\ =& 2(2m-1) + 2(2m-1) + 4 \\ =& 8m.\end{aligned}$$

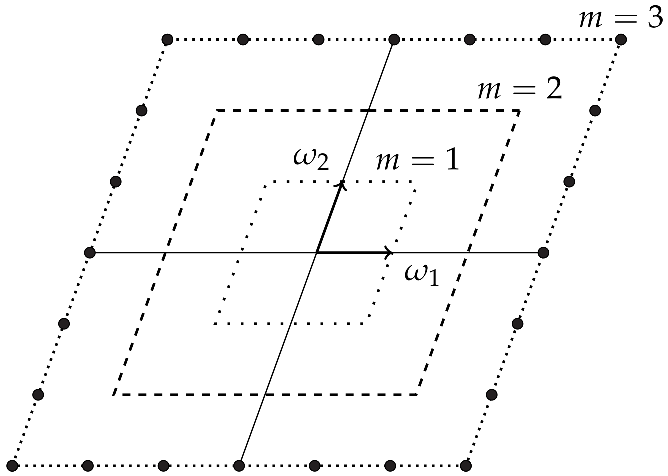

Abbildung 1: Die Parallelogramme P_1, P_2, P_3.

Sei $r = min_{\tau \in P_1}|\tau|$, dann ist $mr = min_{\tau \in P_m}|\tau|$.
Damit folgt:

$$\sum_{\gamma \in P_m \cap L} \frac{1}{|\gamma|^\sigma} \leq 8m \frac{1}{(mr)^\sigma}.$$

Da die disjunkte Vereinigung $\biguplus_{m=1}^{\infty}(P_m \cap L)$ das gesamte Gitter $L \setminus \{(0,0)\}$ umfasst, lässt sich die Reihe aus dem Lemma schreiben als

$$\sum_{\substack{\gamma \in L \\ \gamma \neq 0}} \frac{1}{|\gamma|^\sigma} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\gamma \in P_m \cap L} \frac{1}{|\gamma|^\sigma},$$

welche von der Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty}(8m)\frac{1}{(mr)^{\sigma}} = \frac{8}{r^{\sigma}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{\sigma-1}}$$

majorisiert wird. Diese konvergiert, da $\frac{8}{r^{\sigma}}$ eine Konstante ist und die Reihe vom Integral $\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\sigma-1}}$ majorisiert wird, das für alle $\sigma > 2$ konvergiert [3, Kap. VII, Satz (3.7)]. Somit ist nach Majorantenkriterium die Aussage des Lemmas gezeigt. □

(3.4) Lemma
G_k ist holomorph auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$.

Beweis:
Sei zunächst τ aus dem Fundamentalbereich D von $\mathbb{H}$ (d.h. $|\tau| \geq 1$ und $|Re(\tau)| \leq \frac{1}{2}$) und $\eta = e^{2\pi i/3}$. Dann gilt für $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
|m\tau+n|^2 &= \sqrt{(m\tau+n)\overline{(m\tau+n)}}^{\,2} \\
&= m^2\tau\overline{\tau} + m\tau n + m\overline{\tau}n + n^2 \\
&= m^2|\tau|^2 + mn(\tau+\overline{\tau}) + n^2 \\
&= m^2|\tau|^2 + 2mn\mathrm{Re}(\tau) + n^2 \\
&\geq m^2 + 2mn(-\frac{1}{2}) + n^2 \\
&= m^2 + 2mn\cos(2\pi/3) + n^2 \\
&= m^2|\eta|^2 + 2mn\mathrm{Re}(\eta) + n^2 \\
&= |m\eta+n|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ |m\tau+n|^{-2} \leq |m\eta+n|^{-2} \\
&\Rightarrow |m\tau+n|^{-2k} \leq |m\eta+n|^{-2k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Also gilt $|m\tau+n|^{-k} \leq |m\eta+n|^{-k}$ für alle $k \geq 2$, k gerade. $(*)$

Sei nun L das von $(\eta, 1) \in \mathbb{C}^2$ erzeugte Gitter, dann ist

$$\sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{|m\eta+n|^k} = \sum_{\substack{\gamma\in L \\ \gamma\neq 0}} \frac{1}{|\gamma|^k}.$$

Somit konvergiert diese Reihe nach Lemma (3.3) für $k > 2$. Mit $(*)$ haben wir also eine konvergente Majorante von $G_k(\tau)$ für alle $\tau \in D$ gefunden. Nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium konvergiert hiermit $G_k(\tau)$ absolut und gleichmäßig auf D.
Aus der bereits gezeigten Eigenschaft $G_k(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \tau) = (c\tau + d)^k G_k(\tau)$ folgt direkt:

$$G_k(\tau) \text{ konvergiert } \Leftrightarrow G_k(g \cdot \tau) \text{ konvergiert } \forall g \in \mathbb{G}.$$

Daher lässt sich das Ergebnis auf die Transformationen $gD, g \in G$ übertragen. Da D ein Fundamentalbereich ist, wird $\mathbb{H}$ von diesen Transformationen überdeckt und G_k konvergiert somit auch auf $\mathbb{H}$ gleichmäßig.
$\frac{1}{(m\tau+n)^k}$ ist für alle $m, n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}, \tau \in \mathbb{H}$ als gebrochen-rationale Funktion holomorph. Da endliche Summen holomorpher Funktionen ebenfalls holomorph sind, ist also jede Partialsumme von G_k holomorph und G_k somit der Grenzwert einer Folge holomorpher Funktionen, die auf $\mathbb{H}$ (lokal) gleichmäßig konvergieren. Damit ist G_k nach dem Satz von Weierstraß (2.3) holomorph auf $\mathbb{H}$. $\square$

Da wir nun die Holomorphie der Eisensteinreihe gezeigt haben, fehlt uns einzig noch die Fourierreihenentwicklung.
Betrachten wir hierzu zunächst die Riemannsche Zeta-Funktion

$$\zeta(s) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}.$$

Die Reihe konvergiert für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$, denn mit $s = \sigma + it$ für $\sigma, t \in \mathbb{R}$ gilt für $m \in \mathbb{N}$:

$$|m^s| = |e^{\ln(m)s}| = |e^{\ln(m)\sigma} e^{\ln(m)it}| = |e^{\ln(m)\sigma}||e^{\ln(m)it}| = |e^{\ln(m)\sigma}| = m^\sigma.$$

Um die Holomorphie zu zeigen, wähle man $\epsilon > 0$ beliebig. So lässt sich für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1 + \epsilon$ die Zeta-Funktion $\zeta(s)$ abschätzen durch

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{|m^s|} < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{|m^{1+\epsilon}|}.$$

Da die letztere Reihe konvergent ist, gilt nach Weierstraßschem Majorantenkriterium wieder absolut gleichmäßige Konvergenz von $\zeta(s)$ auf $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 1 + \epsilon\}$. Da ϵ aber beliebig gewählt war, folgt somit die lokal gleichmäßige Konvergenz auf

$\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 1\}$ und man erhält anschließend mit dem Satz von Weierstraß (2.3) die Holomorphie der Zetafunktion in diesem Bereich.

Kommen wir nun zum abschließenden Satz dieses Kapitels:

(3.5) Satz
Sei $\sigma_l(r) := \sum\limits_{d|r} d^l$ die Summe der l-ten Potenzen der positiven Teiler von r. Dann gilt:

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{r=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(r) q^r.$$

Beweis:
Um die Fourierreihendarstellung herzuleiten, benötigen wir zunächst eine Identität für die Summanden der Eisensteinreihen, die im Folgenden hergeleitet wird.
Betrachten wir die Funktion $\tau \mapsto \pi \cot(\pi\tau)$ für $\tau \in \mathbb{H}$.
Nach dem Satz von der Partialbruchentwicklung des Cotangens [4, Kap. VI, Satz (4.2)] wissen wir:

$$\pi \cot(\pi\tau) = \frac{1}{\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\tau - n} + \frac{1}{\tau + n} \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\tau + n}.$$

Andererseits gilt $|q| = e^{-2\pi \mathrm{Im}(\tau)} < 1$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$, also lässt sich die geometrische Reihe anwenden:

$$\begin{aligned}\pi \cot(\pi\tau) &= \pi i \frac{e^{i\pi\tau} + e^{-i\pi\tau}}{e^{i\pi\tau} - e^{-i\pi\tau}} = \pi i \frac{e^{2\pi i\tau} + 1}{e^{2\pi i\tau} - 1} = \pi i \frac{q+1}{q-1} = \pi i \left(1 - 2\frac{1}{1-q}\right) \\ &= \pi i \left(1 - 2\sum_{d=0}^{\infty} q^d\right).\end{aligned}$$

Gleichsetzen liefert

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\tau + n} = \pi i \left(1 - 2\sum_{d=0}^{\infty} q^d\right).$$

Differenziere nun beide Seiten der Gleichung $(k-1)$-mal (für $k \geq 2$):

$$\frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\tau + n} \right) = \frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}} \left(\pi i \left(1 - 2\sum_{d=0}^{\infty} q^d\right)\right).$$

Da die Folge der Partialsummen gleichmäßig gegen den Cotangens konvergiert, lässt sich erneut der Satz von Weierstrass (2.3) anwenden und die Folge der $(k-1)$-ten

Ableitungen konvergiert ebenfalls gleichmäßig. Damit lässt sich Differentiation und Summenbildung vertauschen und man erhält:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(\tau+n)^k} &= -(2\pi i)^k \sum_{d=0}^{\infty} d^{k-1} e^{2\pi i \tau d} \\
\Leftrightarrow (-1)^k \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau+n)^k} \right) &= \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{d=0}^{\infty} d^{k-1} q^d. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Diese Identität wollen wir nun auf die Eisensteinreihen anwenden. Für gerade k ergibt sich die Schreibweise

$$\begin{aligned}
G_k(\tau) &= \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(m\tau+n)^k} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n^k} + \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m\tau+n)^k} \\
&= 2\zeta(k) + 2\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m\tau+n)^k}.
\end{aligned}$$

Ersetzt man in der Identität $(*)$ τ mit $m\tau$, so lässt sie sich (für gerade k) auf diese Darstellung anwenden. Da G_k außerdem holomorph ist, ist die Reihe insbesondere absolut konvergent und die Summationsreihenfolge lässt sich beliebig verändern [4, Kap. II, Satz (3.1)]. Man erhält:

$$\begin{aligned}
G_k(\tau) &= 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{d=0}^{\infty} d^{k-1} q^{md} \\
&= 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{d|r} d^{k-1} q^r \\
&= 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{r=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(r) q^r.
\end{aligned}$$

□

Beweis zu Satz (3.2) (Fortsetzung):
Insgesamt haben wir gezeigt, dass G_k holomorph ist, die gewünschte Identität unter der Operation von $\mathbb{G}$ erfüllt und schlussendlich eine entsprechende Fourierreihenentwicklung besitzt. Daraus folgt, dass $G_k(\tau)$ für gerade $k > 2$ eine Modulform vom Gewicht k ist. □

§4 Normierte Eisensteinreihe und Bernoulli-Zahlen

Im vorherigen Kapitel haben wir die Eisensteinreihen eingeführt und den Nachweis geliefert, dass es sich hierbei um Modulformen handelt. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns genauer mit der normierten Eisensteinreihe und dem Zusammenhang der Koeffizienten in der Potenzreihendarstellung mit den sogenannten Bernoulli-Zahlen. Außerdem werden am Ende einige Beispiele zum expliziten Ausrechnen der Reihen gebracht.

Man normiert die Eisensteinreihe, um den konstanten Koeffizienten 1 in der Fourierreihenentwicklung zu erhalten.

(4.1) Definition
Die normierte Eisensteinreihe ist die Reihe

$$E_k(\tau) := \frac{1}{2\zeta(k)} G_k(\tau).$$

Die Werte für $\zeta(k)$ können nun mithilfe der Folge der Bernoulli-Zahlen $(B_k)_{k\geq 0}$ ausgedrückt werden, die definiert ist als die Zahlenfolge mit der Eigenschaft, dass

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Betrachtet man die Exponentialfunktion also als Potenzreihe

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}},$$

erhält man die Identität

$$1 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!} \right)$$

Die Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn im Cauchy-Produkt der konstante Koeffizient 1 ist und die Koeffizienten aller Monome vom Grad > 0 verschwinden. Auf diese Weise lässt sich eine Rekursionsformel für die Bernoulli-Zahlen herleiten.
Speziell ist $B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_k = 0$ für $k > 1$ ungerade, und beispielsweise $B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}$.

(4.2) Satz
Sei $k \geq 2$ eine gerade, ganze Zahl, dann gilt:

$$\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k}{2 \cdot k!} B_k.$$

Beweis:
Um die Identität zu zeigen, werden wir zwei Darstellungen der Funktion $\tau \mapsto \pi\tau \cot(\pi\tau)$ für $|\tau| < 1$ bilden und anschließend gleichsetzen.
Zunächst erhält man durch Einsetzen von $x = 2i\pi\tau$ in die Definiton der Bernoulli-Zahlen folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
\pi\tau \cot(\pi\tau) &= \pi\tau i \frac{e^{i\pi\tau} + e^{-i\pi\tau}}{e^{i\pi\tau} - e^{-i\pi\tau}} = \pi\tau i \frac{e^{2i\pi\tau} + 1}{e^{2i\pi\tau} - 1} \\
&= \pi\tau i + \frac{2i\pi\tau}{e^{2i\pi\tau} - 1} = \pi\tau i + \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{(2i\pi\tau)^k}{k!} \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} B_k \frac{(2i\pi)^k}{k!} \tau^k.
\end{aligned}$$

Andererseits lässt sich wie im Beweis von Satz (3.5) die Partialbruchentwicklung des Cotangens bilden [4, Kap. VI, Satz (4.2)].

$$\begin{aligned}
\pi\tau \cot(\pi\tau) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{\tau + n} + \frac{\tau}{\tau - n} \right) \\
&= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau^2}{\tau^2 - n^2} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\tau^2}{n^2}}{1 - \frac{\tau^2}{n^2}} \\
&= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\tau^{2l}}{n^{2l}} = 1 - 2 \sum_{\substack{l=2, \\ l\, gerade}}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^l} \right) \tau^l.
\end{aligned}$$

Gleichsetzen liefert nun

$$\begin{aligned}
& 1 + \sum_{k=2}^{\infty} B_k \frac{(2i\pi)^k}{k!} \tau^k = 1 - 2 \sum_{\substack{l=2, \\ l\, gerade}}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^l} \right) \tau^l \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{k=2}^{\infty} -B_k \frac{(2i\pi)^k}{2 \cdot k!} \tau^k = \sum_{\substack{l=2, \\ l\, gerade}}^{\infty} \zeta(l) \tau^l.
\end{aligned}$$

Durch Vergleich der Koeffizienten ergibt sich die Formel des Satzes für $k \geq 2$. □

(4.3) Korollar
Mit den Bernoulli-Zahlen $(B_k)_{k\geq 0}$ ergibt sich:

$$E_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{r=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(r)q^r.$$

Beweis:
Nach Definition der normierten Eisensteinreihe $E_k(\tau)$, der Potenzreihendarstellung aus Satz (3.5) und der Darstellung der ζ-Funktion aus Satz (4.2) erhält man:

$$\begin{aligned}E_k(\tau) &= \frac{1}{2\zeta(k)}G_k(\tau) = 1 + \frac{2(2\pi i)^k}{2\zeta(k)(k-1)!}\sum_{r=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(r)q^r \\ &= 1 - \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!}\cdot\frac{k!}{(2\pi i)^k B_k}\sum_{r=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(r)q^r = 1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{r=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(r)q^r. \qquad \square\end{aligned}$$

(4.4) Beispiele
Mithilfe dieses Korollars (4.3) lassen sich die Reihen sehr einfach beschreiben, beispielsweise:

$$\begin{aligned}E_4(\tau) &= 1 + 240\sum_{r=1}^{\infty}\sigma_3(r)q^r = 1 + (240\cdot 1^3)q + (240(1^3+2^3))q^2 + ..., \\ &= 1 + 240q + 2.160q^2 + ... \\ E_6(\tau) &= 1 - 504\sum_{r=1}^{\infty}\sigma_5(r)q^r = 1 - (504\cdot 1^5)q - (504(1^5+2^5))q^2 - ...., \\ &= 1 - 504q - 16.632q^2 - ... \\ E_8(\tau) &= 1 + 480\sum_{r=1}^{\infty}\sigma_7(r)q^r = 1 + (480\cdot 1^7)q + (480(1^7+2^7))q^2 + ... \\ &= 1 + 480q + 61.920q^2 + ...\end{aligned}$$

Vergleicht man die ersten Koeffizienten von

$$E_4^2 = 1 + (240\cdot 2)q + (2\cdot 2.160 + 240\cdot 240)q^2 + ... = 1 + 480q + 61.920q^2 + ...$$

mit denen von E_8, so fällt einem die Übereinstimmung auf. Tatsächlich wird im nächsten Thema *"Die Algebra der Modulformen"* noch gezeigt werden, dass $E_4^2 = E_8$

gilt, und sich darüber hinaus sogar jede Eisensteinreihe als Linearkombination von E_4 und E_6 darstellen lässt.
Betrachten wir nun zum Abschluss das Objekt $E_4^3 - E_6^2$. Es handelt sich hierbei um eine Modulform vom Gewicht 12 mit dem konstanten Term $a_0 = 0$ in der Fourierreihendarstellung

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r q^r.$$

Eine Modulform mit dieser Eigenschaft heißt Spitzenform *("cusp form")*. $E_4^3 - E_6^2$ ist also ein nichttriviales Beispiel einer solchen Spitzenform. Berechnen wir nun die Koeffizienten von q und q^2:

$$\begin{aligned} E_4^3 - E_6^2 &= (1 + 240q + 2.160q^2 + ...)^3 - (1 - 504q - 16.632q^2 - ...)^2 \\ &= 0 + (3 \cdot 240 + 2 \cdot 504)q + (3 \cdot 2.160 + 3 \cdot 240 \cdot 240 + 2 \cdot 16.632 - 504 \cdot 504)q^2 \\ &= 0 + 1728q + 1728 \cdot (-24)q^2 + ... \end{aligned}$$

Die auf den Koeffizienten 1 von q normierte Form

$$\triangle := \frac{1}{1728}(E_4^3 - E_6^2)$$

wird ebenfalls im nächsten Thema noch weitere Verwendung finden.

Literatur

[1] W. Ebeling. *Lattices and Codes - A Course Partially Based on Lectures by Friedrich Hirzebruch*. Springer, 3 edition, 2013.

[2] J. J. O'Connor and E. F. Robertson. *Ferdinand Gotthold Max Eisenstein, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Eisenstein.html*. (Aufgerufen am 18.04.2015).

[3] H. Führ u.A. *Analysis II*. A. Krieg, 2014.

[4] A. Krieg. *Funktionentheorie I*. A. Krieg, 2012.