RWTH Aachen

Thetareihen als Modulformen

Ausarbeitung zum Seminar „Gitter und Codes“ im Sommersemester 15 vorgelegt von:

Anne Carina Göbels

Matrikelnummer: 297309
Abgabedatum: 27. April 2015
Betreuer: Christoph Schönnenbeck
Prüferin: Prof. Dr. rer. nat. Gabriele Nebe
Lehrstuhl D für Mathematik

Die folgende Ausarbeitung orientiert sich an den Abschnitten (2.1) sowie (2.4) aus W. Ebeling „Lattices and Codes“.
Darüber hinaus werden an zentralen Stellen einige Aussagen der Funktionentheorie benötigt. Diese lehnen sich an das Vorlesungsskript „Funktionentheorie I“ von A. Krieg, S. Walcher und O. Wittich an.

Inhaltsverzeichnis

1 Die Thetafunktion eines Gitters

Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter und $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \tau > 0\}$ bezeichne die obere Halbebene in $\mathbb{C}$.

(1.1) Definition
Seien $\tau \in \mathbb{H}$ und $q := e^{2\pi i\tau}$. Dann definiert man die **Theta-Funktion** eines Gitters Γ als die Funktion $\vartheta_\Gamma : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, mit

$$\vartheta_\Gamma(\tau) := \sum_{x\in\Gamma} q^{\frac{1}{2}\Phi(x,x)}$$

Im Weiteren (2.3) wird gezeigt, dass diese für ein beliebiges Gitter $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ eine wohldefinierte, holomorphe Funktion auf $\mathbb{H}$ darstellt. Zunächst wenden wir uns dem Fall der geraden Gitter zu, dazu eine Bemerkung.

(1.2) Bemerkung
Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein gerades Gitter, dann ist $2r = \Phi(x,x)$ für ein $x \in \Gamma$ stets eine nicht-negative gerade Zahl.
In diesem Fall ergibt sich

$$\vartheta_\Gamma(\tau) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r q^r, \tag{1.1}$$

wobei a_r die Gitterpunkte zählt, welche auf der Sphäre $\partial \mathrm{B}_{\sqrt{2r}}(0)$ mit dem Radius $\sqrt{2r}$ um den Ursprung liegen, das heißt $a_r = |\Gamma \cap \partial\mathrm{B}_{\sqrt{2r}}(0)| = |\{x \in \Gamma \mid \Phi(x,x) = 2r\}|$.
Sei $m := \min_{x\in\Gamma\setminus\{0\}}\{\sqrt{\Phi(x,x)} \in \mathbb{R}\}$. Dann gilt für alle Gitterpunkte $x \in \Gamma \setminus \{0\}$, dass $\sqrt{\Phi(x,x)} \geq m$ ist. Betrachtet man nun zwei Gitterpunkte $x_1, x_2 \in \Gamma \setminus \{0\}$, welche auf einer dieser Sphären liegen, so muss für den Abstand d zwischen diesen Punkten gelten, dass auch $d \geq m$ ist. Betrachtet man nun die Sphärenoberfläche als $n-1$ dimensionale Fläche, auf der die Gitterpunkte liegen, so ergibt sich, dass in einem Kreis $\partial\mathrm{B}_{\frac{m}{2}}(a)$ um einen Punkt a auf der Fläche mit dem Radius $\frac{m}{2}$ höchstens ein Gitterpunkt zu finden ist. Fragt man sich nun, wie viele Gitterpunkte auf der Sphärenoberfläche zu finden sind, so kann man diese Anzahl nach oben durch $D := \frac{\mathrm{vol}(\partial\mathrm{B}_{\sqrt{2r}}(0))}{\mathrm{vol}(\partial\mathrm{B}_{\frac{m}{2}}(a))}$ abschätzen. Da $\mathrm{vol}(\partial\mathrm{B}_{\frac{m}{2}}(a))$ eine Konstante ist, welche nicht von der betrachteten Sphärenoberfläche abhängt, folgt, dass a_r, also die Anzahl der Gitterpunkte auf dieser, bis auf einen konstanten Faktor mit der Oberfläche der Sphäre wächst. Für diese gilt

$$\mathrm{vol}(\partial\mathrm{B}_{\sqrt{2r}}(0)) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}(\sqrt{2r})^{n-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})},$$

wobei Γ hier die Gamma-Funktion bezeichnet.
Mit diesem Ausdruck folgt, dass die Folge a_r so schnell wie $(\sqrt{2r})^{n-1}$ wächst.

(1.3) Lemma
Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein gerades Gitter, dann stellt ϑ_Γ eine wohldefinierte Funktion dar.

Beweis
Es genügt zu zeigen, dass die Reihe in (1.1) für alle $\tau \in \mathbb{H}$ und ganzen Gitter Γ gleichmäßig konvergiert, da ϑ_Γ dann eine Funktion mit einer eindeutigen, lokale Potenzreihenentwicklung darstellt und somit eine wohldefinierte Funktion auf $\mathbb{H}$ ist.
Mit der vorangegangenen Bemerkung (1.2) gilt für die Koeffizienten a_r:

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt[r]{a_r} = \lim_{r\to\infty} \sqrt[r]{(\sqrt{2r})^{n-1}} = \lim_{r\to\infty} (\sqrt[r]{r})^{\frac{n-1}{2}} \cdot (\sqrt[r]{2})^{\frac{n-1}{2}} = 1.$$

Mit dem Satz von Cauchy-Hadamard konvergiert die Potenzreihe (1.1) also gleichmäßig für $|q| < 1$. Nun gilt aber auch $|q| = |e^{2\pi i\tau}|$. Für $\tau \in \mathbb{H}$ existieren $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass $\tau := x + iy$. Dann gilt

$$|e^{2\pi i\tau}| = |e^{2\pi i(x+iy)}| = |e^{2\pi ix}||e^{-2\pi y}| = \underbrace{|(e^{2\pi i})^x|}_{1} \underbrace{|e^{-2\pi y}|}_{<1 \text{ für } 0<y}$$

und somit auch $|e^{2\pi i\tau}| < 1$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$.
Also konvergiert die Reihe gleichmäßig auf $\mathbb{H}$. Dies impliziert wiederum, dass die Theta-Funktion als Grenzwert dieser Reihe wohldefiniert für ein gerades Gitter ist, welche im Weiteren betrachtet werden. ■

Bevor der zentrale Satz dieser Ausarbeitung formuliert wird, sei nochmals angemerkt, wie eine Modulform vom Gewicht $\frac{n}{2}$ definiert ist.

(1.4) Bemerkung
Seien $q = e^{2\pi i\tau}$ und $\tau \in \mathbb{H}$. Eine Modulform vom Gewicht $\frac{n}{2}$ ist eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, für die gilt:

1. $\frac{n}{2}$ ist gerade,
2. für $|q| < 1$ existiert Reihendarstellung $f(\tau) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r q^r$ und
3. es gilt die Identität $f(-\frac{1}{\tau}) = \tau^{\frac{n}{2}} f(\tau)$.

Ziel meines Vortrages ist der Beweis folgendes Satzes:

(1.5) Satz
Sei Γ ein gerades unimodulares Gitter in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

(i) $n \equiv 0 \pmod 8$.

(ii) ϑ_Γ ist eine Modulform vom Gewicht $\frac{n}{2}$.

Dazu werde ich unter anderem auf Aussagen des Vortrages von S. Nell über Modulformen zurückgreifen.

2 Thetareihen als Modulformen

Im Folgenden werden Aussagen über den Zusammenhang zwischen holomorphen Funktionen und Potenzreihen aus der Funktionentheorie benötigt, die als gegeben angenommen werden. Die Theta-Reihe für Gitter lässt sich damit als holomorph charakterisieren. Dies stellt eine Voraussetzung dafür dar, dass ϑ_Γ der Definition einer Modulform genügt.

(2.1) Satz
Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen auf U, die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ konvergiert, so ist f ebenfalls holomorph und die Folge der Ableitungen $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert lokal gleichmäßig gegen $f^{(k)}$.

(2.2) Korollar
Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ lokal gleichmäßig und sind die f_n alle holomorph, so ist

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

holomorph. Wegen der Summenregel und dem Satz von Weierstrass erhält man die Ableitung durch summandenweises Differenzieren.

Als nächstes wird ein Lemma diskutiert, welches unter anderem die allgemeine Wohldefiniertheit und Holomorphie der Theta-Funktion ϑ_Γ nachweist.

(2.3) Lemma
Seien $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter, $q = e^{2\pi i\tau}$ und $v_0 > 0$. Dann konvergiert die Reihe

$$\vartheta_\Gamma(\tau) = \sum_{x\in\Gamma} q^{\frac{1}{2}\Phi(x,x)} = \sum_{x\in\Gamma} e^{\pi i\tau\Phi(x,x)}$$

absolut gleichmäßig für alle τ mit $\mathrm{Im}(\tau) \geq v_0 > 0$.

Beweis
Sei $\Gamma = M \cdot \mathbb{Z}^n$ für eine invertierbare Matrix $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Außerdem definiere

$$\varepsilon := \min_{|x|=1}\Phi(Mx, Mx).$$

Da die Abbildung $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig ist, wird ein mit dem Satz von Weierstrass ein solches Minimum auf dem Rand des Einheitskreises, das heißt für die betrachteten x angenommen. Dieses ist größer null, da M vollen Rang hat, also nur den trivialen Kern besitzt und $x \neq 0$ gilt, da $|x| = 1$ festgelegt wurde. Somit muss $\varepsilon > 0$ gelten.

Außerdem folgt, dass $\Phi(Mx, Mx) \geq \varepsilon\Phi(x,x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist, da gilt:

$$\Phi(Mx, Mx) = \Phi(M\frac{x}{|x|}, M\frac{x}{|x|}) \cdot |x|^2 \geq \varepsilon\Phi(x,x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$
$$\text{und } 0 = \Phi(M0, M0) \geq \varepsilon \cdot \Phi(0,0) = 0 \text{ für } x = 0.$$

Weiterhin ergibt sich mit $\tau = z + iy, z \in \mathbb{R}, y \geq v_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}\sum_{x\in\Gamma} |e^{\pi i\tau\Phi(x,x)}| &= \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} |e^{\pi i(z+iy)\Phi(Mx,Mx)}| = \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} |e^{\pi iz\Phi(Mx,Mx)}| \cdot e^{-\pi y\Phi(Mx,Mx)} \\ &= \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} e^{-\pi v_0\Phi(Mx,Mx)} \leq \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} e^{-\pi v_0\varepsilon\Phi(x,x)} = \sum_{y\in 2\mathbb{Z}^n} e^{-\frac{\pi}{4}v_0\varepsilon\Phi(y,y)} = \vartheta_{2\mathbb{Z}^n}(\frac{iv_0\epsilon}{4}).\end{aligned}$$

Die Reihe besitzt also eine Theta-Reihe des geraden Gitters $2\mathbb{Z}^n$ als Majorante, diese konvergiert nach Lemma (1.3) gleichmäßig. Also konvergiert auch die Theta-Reihe für ein beliebiges Gitter Γ auf jedem Streifen $\mathrm{Im}(\tau) \geq v_0 > 0$ absolut gleichmäßig.
Da die Theta-Reihe auf allen Streifen mit $v_0 > 0$ absolut gleichmäßig konvergiert, folgt dieses Konvergenzverhalten auch für alle offenen Umgebungen $U \subset \mathbb{H}$ von $\tau \in \mathbb{H}$. Damit gilt, dass die Theta-Reihe für ein beliebiges Gitter Γ lokal gleichmäßig absolut konvergent auf $\mathbb{H}$ ist.
Da die Funktionenfolgen, welche in der Reihe aufsummiert werden, Exponentialfunktion sind und diese bekanntermaßen auf $\mathbb{H}$ holomorph sind, ergibt sich mit obigem Korollar (2.2) die Holomorphie der Grenzfunktion ϑ_Γ auf $\mathbb{H}$. ■

Zur Vorbereitung des Beweises von Satz (1.5) hier noch Lemmata, die es erlauben werden einige Aussagen des Vortrags von S. Nell zu nutzen.

(2.4) Lemma
Sei $0 < t \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-\pi(\frac{1}{t})\Phi(x,x)}$ besitzt die Fourier-Transformation $\widehat{f}(y) = (\sqrt{t})^n e^{-\pi t\Phi(y,y)}$, das heißt

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi(\frac{1}{t})\Phi(x,x)} e^{-2\pi i\Phi(x,y)} dx = (\sqrt{t})^n e^{-\pi t\Phi(y,y)}. \tag{2.1}$$

Beweis
Hier sei an das Beispiel der Fourier-Transformation des Vortrags von S. Nell erinnert:
Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, x \mapsto e^{-\pi\Phi(x,x)}$ besitzt die Fourier-Transformation $\widehat{f}(y) = e^{-\pi\Phi(y,y)}$.
Aus diesen Fall werden wird nun die betrachtete Funktion zurückgeführt.
Mit der Substitution von $x = \widetilde{x}\sqrt{t}$ und $y = \frac{\widetilde{y}}{\sqrt{t}}$ in Gleichung (2.1) ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi(\frac{1}{t})\Phi(\widetilde{x}\sqrt{t},\widetilde{x}\sqrt{t})} e^{-2\pi i\Phi(\widetilde{x}\sqrt{t},\frac{\widetilde{y}}{\sqrt{t}})} (\sqrt{t})^n d\widetilde{x} &= (\sqrt{t})^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi(\frac{1}{t})(\sqrt{t})^2\Phi(\widetilde{x},\widetilde{x})} e^{-2\pi i\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\Phi(\widetilde{x},\widetilde{y})} d\widetilde{x} \\ &= (\sqrt{t})^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\Phi(\widetilde{x},\widetilde{x})} e^{-2\pi i\Phi(\widetilde{x},\widetilde{y})} d\widetilde{x} = (\sqrt{t})^n e^{-\pi t\Phi(\widetilde{y},\widetilde{y})}.\end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung. ■

Da die Poissonsche Summenformel, welche im Vortrag von S. Nell bewiesen wurde, verwendet wird, sei diese hier nochmals als Lemma formuliert:

(2.5) Lemma

Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx < \infty$,
2. ist $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum, so konvergiert die Reihe $\sum_{x\in\Gamma} |f(x+u)|$ gleichmäßig auf K,
3. die Reihe $\sum_{y\in\Gamma^*} \widehat{f}(y)$ konvergiert absolut.

Dann gilt:

$$\sum_{x\in\Gamma} f(x) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma)} \sum_{y\in\Gamma^*} \widehat{f}(y).$$

Des Weiteren ist hier ein Lemma aufgeführt, welches die erste und diritte Voraussetzung für die später betrachtete Funktion prüft.

(2.6) Lemma

Sei $\Gamma \in \mathbb{R}^n$ ein Gitter. Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-\pi\frac{1}{t}\Phi(x,x)}$ mit $t \in \mathbb{R}_{>0}$ erfüllt die Voraussetzungen 1.-3. aus Lemma (2.5).

Beweis

Zu 1.:

Betrachtet man zunächst den Fall $n = 1$, so ergibt sich:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|dx = \int\limits_{\mathbb{R}} |e^{-\pi\frac{1}{t}x^2}|dx = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\pi\frac{1}{t}x^2}dx$$

Der Integrand stellt also eine Gauss-Funktion dar, welche bekanntermaßen konvergiert. Somit folgt die Behauptung für $n = 1$.

Mit dem Satz von Fubini lässt sich nun induktiv folgern, dass die Aussage auch für allgemeine n Gültigkeit besitzt. Die Aussage für den Fall $n = 1$ stellt hierbei die Induktionsvoraussetzung dar.

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |e^{-\pi\frac{1}{t}\Phi(x,x)}|dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\frac{1}{t}x_1^2} \cdot ... \cdot e^{-\pi\frac{1}{t}x_n^2}dx_1...dx_n \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\pi\frac{1}{t}x_1^2} \cdot ... \cdot e^{-\pi\frac{1}{t}x_{n-1}^2}dx_1...dx_{n-1} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\pi\frac{1}{t}x_n^2}dx_n}_{= c_n < \infty (\text{lt. (IV)})} \\
&= c_n \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\pi\frac{1}{t}x_1^2} \cdot ... \cdot e^{-\pi\frac{1}{t}x_{n-1}^2}dx_1...dx_{n-1}
\end{aligned}$$

Nach n-maligem Anwenden der Induktionsvoraussetzung ergibt sich dann

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx = \prod_{i=1}^{n} c_i < \infty.$$

Somit lässt sich das n-dimensionale uneigentliche Integral in n eindimensionale uneigentliche Integrale aufspalten, die alle als Integrale von Gaussfunktionen gegen geeignete $c_i \in \mathbb{R}$ konvergieren. Es folgt die Behauptung.

Zu 2.:
Da es relativ aufwendig ist, die gleichmäßige Konvergenz für die betrachtete Funktion nachzuweisen und der Schwerpunkt dieser Arbeit auf anderen Themen liegt, wird dieser Beweis hier nicht ausgeführt.

Zu 3.:
Mit Lemma (2.4) ergibt sich $\widehat{f}(y) = (\sqrt{t})^n e^{-\pi t \Phi(y,y)}$. Es folgt

$$\sum_{y\in\Gamma^*} |\widehat{f}(y)| = \sum_{y\in\Gamma^*} |(\sqrt{t})^n e^{-\pi t\Phi(y,y)}| = (\sqrt{t})^n \sum_{y\in\Gamma^*} e^{-\pi t\Phi(y,y)} = (\sqrt{t})^n \vartheta_{\Gamma^*}(it).$$

Da die betrachtete Reihe als Theta-Funktion darstellbar ist, ergibt sich die absolute Konvergenz der Reihe durch die Konvergenz der Theta-Reihe. ■

Um (1.5)(ii) nachzuweisen, wird der folgende, wichtige Satz aus der Funktionentheorie benötigt, welcher wiederum als gegeben vorausgesetzt wird.

(2.7) Satz (Identitätssatz)
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, das heißt nichtleer, offen und zusammenhängend, $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind äquivalent:

1. $f = g$,
2. Die Menge $\{z|f(z) = g(z)\}$ besitzt einen Häufungspunkt, das heißt f und g stimmen auf einer nicht-diskreten Teilmenge von G überein.

(2.8) Lemma
Für $\tau \in \mathbb{H}$ und ein Gitter $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ gilt die Identität

$$\vartheta_\Gamma(-\frac{1}{\tau}) = (\frac{\tau}{i})^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma)} \vartheta_{\Gamma^*}(\tau).$$

Beweis
Beide Seiten der Gleichung sind holomorph für $\tau \in \mathbb{H}$. Wenn nun die obige Gleichheit für die Folge $\tau = it$ mit $t \in \mathbb{R}_{>0}$ nachgewiesen werden kann, folgt mit Satz (2.7) die Identität für alle $\tau \in \mathbb{H}$.

Mit Lemma (2.4) und der Poissonschen Summenformel, welche laut Lemma (2.6) verwendet werden kann, gilt

$$\begin{aligned}\vartheta_\Gamma(-\frac{1}{it}) &= \sum_{x\in\Gamma} e^{\pi i(\frac{-1}{it})\Phi(x,x)} = \sum_{x\in\Gamma} e^{-\pi\frac{1}{t}\Phi(x,x)} \\ &= \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma)} \sum_{y\in\Gamma^*} (\sqrt{t})^n e^{-\pi t\Phi(y,y)} \\ &= t^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma)} \vartheta_{\Gamma^*}(it).\end{aligned}$$

Dies liefert die Behauptung. ■

Damit stehen alle benötigten Hilfsmittel zum Beweis des zentralen Satzes (1.5) bereit. Dazu sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein gerades, unimodulares Gitter. Es soll gezeigt werden, dass gilt:

(i) $n \equiv 0 \pmod 8$ und

(ii) ϑ_Γ ist eine Modulform vom Gewicht $\frac{n}{2}$.

Beweis (von Satz 1.5)
Zunächst zum Beweis von (i):
Angenommen n wäre nicht durch 8 teilbar, dann kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass $n \equiv 4 \bmod 8$. Diese Wahl ist gültig, da anstatt Γ sonst $\Gamma \perp \Gamma$ oder $\Gamma \perp \Gamma \perp \Gamma \perp \Gamma$ betrachtet werden kann, um dies zum Widerspruch zu führen. Dies ist möglich, da für $n \not\equiv 0 \bmod 8$ eines der obigen Gitter in seiner Dimension äquivalent zu 4 mod 8 wird.
Mit Lemma (2.8) ergibt sich dann

$$\vartheta_\Gamma(-\frac{1}{\tau}) = (-1)^{\frac{n}{4}} \tau^{\frac{n}{2}} \vartheta_\Gamma(\tau) = -\tau^{\frac{n}{2}} \vartheta_\Gamma(\tau)$$

da $\Gamma^* = \Gamma$ und $\frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma)} = 1$ gilt.
Weiterhin gilt, dass ϑ_Γ für die betrachteten geraden Gitter invariant unter der Operation $T : \tau \mapsto \tau + 1$ ist, da gilt

$$e^{2\pi i(\tau+1)} = e^{2\pi i\tau} \cdot \underbrace{e^{2\pi i}}_{=1} = e^{2\pi i\tau} = q.$$

Außerdem sei an die Definition der Operation von S erinnert: $S : \tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$.
Es folgt somit

$$\vartheta_\Gamma(T(-\frac{1}{\tau})) = \vartheta_\Gamma(TS\tau) = -\tau_\Gamma^{\frac{n}{2}} \vartheta(\tau).$$

Weiterhin ergibt sich mit $(TS)\tau = 1 - \frac{1}{\tau} = \frac{\tau-1}{\tau}$ und $(TS)^2\tau = 1 - \frac{\tau}{\tau-1} = \frac{1}{\tau-1}$:

$$
\begin{aligned}
\vartheta_\Gamma((TS)^3\tau) &= -((TS)^2\tau)^{\frac{n}{2}}\vartheta_\Gamma((TS)^2\tau) \\
&= [-((TS)^2\tau)^{\frac{n}{2}}][-((TS)\tau)^{\frac{n}{2}}]\vartheta_\Gamma((TS)\tau) \\
&= [-((TS)^2\tau)^{\frac{n}{2}}][-((TS)\tau)^{\frac{n}{2}}][-\tau^{\frac{n}{2}}]\vartheta_\Gamma(\tau) \\
&= -(-1)^{\frac{n}{2}}(\frac{\tau-1}{\tau})^{\frac{n}{2}}(\frac{1}{\tau-1})^{\frac{n}{2}}\tau^{\frac{n}{2}}\vartheta_\Gamma(\tau) \\
&= -(-1)^{\frac{n}{2}}\vartheta_\Gamma(\tau) \\
&= -\vartheta_\Gamma(\tau).
\end{aligned}
$$

Dies stellt jedoch mit der Wahl von $0 \neq \tau \in \mathbb{H}$ einen Widerspruch zur Annahme dar, da $(TS)^3$ auch gleich der Identitätsabbildung ist, also gilt:

$$
\vartheta_\Gamma((TS)^3\tau) = \vartheta_\Gamma(\tau) = \sum_{x\in\Gamma} e^{\pi i\tau\Phi(x,x)} \neq -\sum_{x\in\Gamma} e^{\pi i\tau\Phi(x,x)} - \vartheta_\Gamma(\tau).
$$

Somit folgt die Behauptung (i).
Nun zum Beweis von (ii):
In Lemma (2.3) wurde bereits die Holomorphie von ϑ_Γ nachgewiesen. Mit obigem Beweis folgt außerdem, dass $\frac{n}{2}$ gerade ist. Weiterhin ist ϑ_Γ als Grenzfunktion einer konvergenten Potenzfunktion definiert und besitzt dadurch die geforderte Reihendarstellung.
Es muss also noch die Identität aus 3. nachgewiesen werden.
Da nun $n \equiv 0 \pmod 8$ sowie $\Gamma = \Gamma^*$ und $\frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma)} = 1$ gilt, erhält man diese mit Lemma (2.8):

$$
\vartheta_\Gamma(S\tau) = \vartheta_\Gamma(-\frac{1}{\tau}) = (-i)^{\frac{n}{2}}\tau^{\frac{n}{2}}\vartheta_\Gamma(\tau) = \tau^{\frac{n}{2}}\vartheta_\Gamma(\tau).
$$

Damit erfüllt ϑ_Γ die Definition einer Modulform vom Gewicht $\frac{n}{2}$ und es gilt (ii). ■

Außerdem wurde festgestellt, dass ϑ_Γ für gerade Gitter invariant unter der Operation von T, also den Translationen, auf der oberen Halbebene ist.