

Seminar Gruppentheorie
unter Leitung von Alice Niemeyer
RWTH Aachen

Endliche Spiegelungsgruppen

nach Humphreys [1] (Kap. 2)

Simon Bürger

30. November 2012

Inhaltsverzeichnis

1	Coxetergraphen	2
2	Assoziierte Matrizen	3
3	Klassifikation endlicher Spiegelungsgruppen	6

In diesem Vortrag werden die endlichen Spiegelungsgruppen mithilfe von Coxetergraphen klassifiziert.

1 Coxetergraphen

Wir wissen bereits, dass eine Spiegelungsgruppe W bis auf Isomorphie festgelegt wird durch ein einfaches System Δ und die Ordnung der Produkte $m(\alpha, \beta) := \text{ord}(S_\alpha S_\beta)$ für alle $\alpha, \beta \in \Delta$. Klar ist, dass für alle $\alpha \neq \beta \in \Delta$ gilt $m(\alpha, \beta) \geq 2$.

Definition 1.1 Ein ungerichteter Graph (Δ, E) mit Kantenmarkierungen $m(\alpha, \beta) \in \{3, 4, \dots, \infty\}$ für alle $\{\alpha, \beta\} \in E$ heißt Coxetergraph, wobei die Markierung 3 so oft vorkommt, dass wir sie im Folgenden weglassen.

Nun können wir jeder Spiegelungsgruppe W einen solchen Graphen zuordnen. Dazu fixieren wir ein einfaches System Δ , und nehmen dessen Wurzeln als Knoten. Außerdem verbinden wir $\alpha, \beta \in \Delta$ genau dann durch eine Kante, wenn $m(\alpha, \beta) \geq 3$. Diese Kante wird dann entsprechend markiert. Da verschiedene einfache Systeme einer Spiegelungsgruppe zueinander konjugiert sind hängt der Coxetergraph nicht von der Wahl von Δ ab, sondern nur von der Gruppe W .

Beispiel 1.2 Die Diedergruppe D_8 (Symmetriegruppe eines Quadrats) wird als Coxetergruppe von zwei Spiegelungen α und β erzeugt mit $(\alpha\beta)^4 = 1$. Also hat der Coxetergraph zu D_8 nur eine einzige Kante, siehe Abbildung 1. Insbesondere ist $D_8 \cong \langle \alpha, \beta | \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^4 \rangle$.

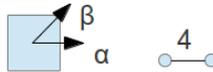


Abbildung 1: Symmetriegruppe D_8 mit Coxetergraph

Beispiel 1.3 Die Symmetrische Gruppe S_{n+1} entspricht der Untergruppe von Permutationsmatrizen in $O(\mathbb{R}^{n+1})$. Erzeugt wird die Gruppe von n Transpositionen, welche die Einheitsvektoren e_i und e_{i+1} vertauschen. Ein einfaches System von S_{n+1} ist also $\Delta = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_n - e_{n+1}\}$. Nun betrachte man Paare $(\alpha, \beta) = (e_i - e_{i+1}, e_j - e_{j+1})$ von solchen Spiegelungen. Falls $|i - j| > 1$, so wirken die Spiegelungen auf verschiedene Basisvektoren und kommutieren also miteinander. Das heißt, die die Zugehörigen Knoten im Coxetergraphen sind nicht durch eine Kante verbunden. Für $|i - j| = 1$ kann man leicht überprüfen, dass $(\alpha\beta)^3 = 1$ ist. Damit ist $S_{n+1} = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n | \alpha_i^2, (\alpha_i \alpha_{i+1})^3, (\alpha_i \alpha_j)^2 \forall |i - j| > 1 \rangle$. Und insbesondere erhält man den Graphen in Abbildung 2.



Abbildung 2: Coxetergraph der Gruppe S_{n+1}

Lemma 1.4 Seien W_1, W_2 endliche Spiegelungsgruppen die wesentlich auf den euklidischen Räumen V_1 und V_2 operieren. Falls W_1 und W_2 den gleichen Coxetergraphen haben, so gibt es eine Isometrie zwischen V_1 und V_2 , die einen Isomorphismus von W_1 auf W_2 induziert.

Beweis: Seien Δ_i einfache Systeme der beiden Gruppen. Da die Gruppen wesentlich sind, sind dies zugleich Basen von V_i . OBdA seien alle Wurzeln normiert. Nun kann man Δ_1 so auf Δ_2 abbilden, dass es verträglich ist mit dem Coxetergraphen, und dies lässt sich linear zu einem Isomorphismus $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ fortsetzen. Klar ist, dass dieses ϕ einen Isomorphismus zwischen den W_i induziert. Zu zeigen bleibt, dass es sich dabei um eine Isometrie handelt.

Seien $\alpha \neq \beta \in \Delta_1$ und der Winkel zwischen ihnen sei $\vartheta = \pi - \pi/m(\alpha, \beta)$. Nun gilt $(\alpha, \beta) = \cos(\vartheta) = -\cos(\pi/m(\alpha, \beta)) = (\phi(\alpha), \phi(\beta))$. Das heißt, dass Skalarprodukt bleibt erhalten unter ϕ , welches damit eine Isometrie ist. \square

Definition 1.5 Ein Coxetersystem (W, S) heißt irreduzibel, falls der zugehörige Coxetergraph zusammenhängend ist.

Lemma 1.6 Sei (W, S) ein Coxetersystem mit Graph Γ . Seien $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k \subset \Gamma$ die Zusammenhangskomponenten des Graphen, und $S_1, \dots, S_k \subset S$ die zugehörigen Generatoren. Dann ist W das direkte Produkt der parabolischen Untergruppen W_{S_1}, \dots, W_{S_k} .

Beweis: Sei $i \in \{1 \dots k\}$ fest. Für jedes $j \neq i$ gilt nun, dass S_i mit S_j kommutiert, denn es ist $m(\alpha, \beta) = 2$ für alle $s_\alpha \in S_i$ und $s_\beta \in S_j$. Folglich liegt W_{S_i} im Zentralisator von W_{S_j} , und W_{S_i} muss bereits ein Normalteiler von W sein.

Da außerdem der Schnitt der W_{S_i} trivial ist (nach [1] Lemma 1.13), folgt bereits, dass das Produkt aller W_{S_i} direkt ist. Da dieses Produkt insbesondere S enthält, handelt sich um das komplette W . \square

2 Assoziierte Matrizen

Definition 2.1 Für einen Coxetergraphen mit Knotenmenge S der Größe $n := |S|$ und Koeffizienten $m(s, s')$ für $s, s' \in S$ ist die assoziierte Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definiert durch

$$A_{s,s'} := -\cos\left(\frac{\pi}{m(s, s')}\right).$$

Falls Γ durch eine tatsächliche Spiegelungsgruppe W auf einem euklidischen Vektorraum V zustande gekommen ist handelt es sich bei A gerade um die Matrix des Skalarprodukts von V bezüglich eines einfachen Systems von W . Insbesondere ist A in diesem Fall positiv definit. Damit haben wir also ein notwendiges Kriterium gefunden, um zu überprüfen ob es zu einem gegebenen Graphen eine passende Spiegelungsgruppe geben kann.

Beispiel 2.2 Der Graph der Diedergruppe D_8 wurde in Beispiel 1.2 konstruiert. Nun können wir die Matrix dazu einfach angeben.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\cos(\pi/4) \\ -\cos(\pi/4) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2.3 Die Matrix zur symmetrischen Gruppe S_5 lässt sich nach der Vorarbeit in Beispiel 1.3 ebenfalls leicht angeben. Mit $\cos(\pi/3) = 1/2$ ergibt sich

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lemma 2.4 Die Matrizen zu den Graphen in Abbildung 3(a) sind positiv definit, in 3(b) positiv semi-definit (aber nicht positiv-definit), und in 3(c) nicht positiv semi-definit.

Beweis: Die Matrix zu $I_2(m)$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cos(\pi/m) \\ -\cos(\pi/m) & 1 \end{pmatrix}$$

Diese hat Determinante $1 - \cos^2(\pi/m) = \sin^2(\pi/m) > 0$, und ist offenbar positiv definit.

Jeder der übrigen Graphen aus Abbildung 1(a) entsteht aus einem kleineren der aufgelisteten Graphen durch Hinzufügen eines einzigen Knotens (und daran anschließender Kanten). Durch solch ein Hinzufügen vergrößert sich die Matrix eines Graphen um eine Spalte und eine Zeile, aber die bestehenden Einträge bleiben unverändert. Bekanntermaßen ist eine Matrix genau dann positiv definit, wenn all ihre Hauptminoren positiv sind. Also genügt es zu überprüfen, dass die Determinanten der Matrizen aller Graphen der Liste positiv sind. Nach kurzer Rechnung (mithilfe von Laplace-Entwicklung) ergeben sich folgende Werte für $\det(2A)$, wobei der zusätzliche Faktor 2 nur dazu dient, die Rechnung etwas übersichtlicher zu machen.

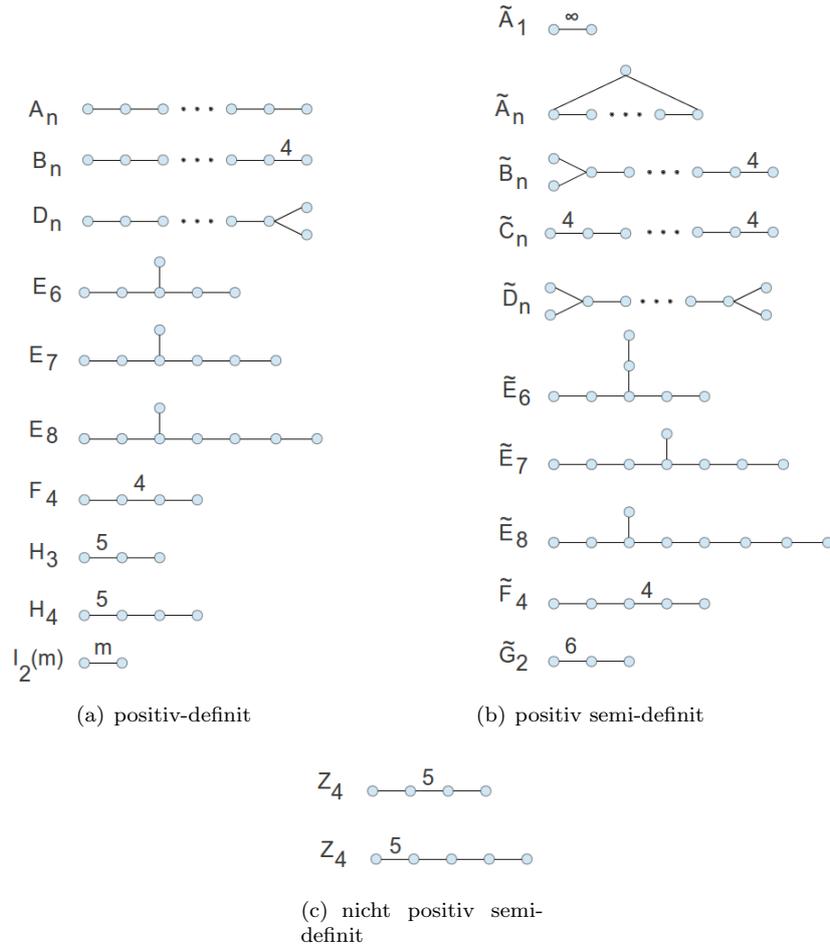


Abbildung 3: einige Coxetergraphen

A_n	B_n	D_n	E_6	E_7	E_8	F_4	H_3	H_4
$n + 1$	2	4	3	2	1	1	$3 - \sqrt{5}$	$(7 - 3\sqrt{5})/2$

Für Graphen aus 3(b) kann man ganz analog vorgehen, da diese jeweils durch Hinzunehmen eines Knotens aus einem der Graphen aus 3(a) entstehen. Folglich ist nur nachzurechnen, dass die Determinante in allen Fällen 0 ist, also die Matrix singulär. Zum Beispiel für \tilde{A}_n ist dies leicht zu sehen, denn hier ist die Summe aller Zeilen bereits 0.

Für die Graphen aus 3(c) braucht man ebenfalls nur die Determinante zu berechnen, da sich dabei schon folgende negative Werte für $\det(2A)$ ergeben:

$$\frac{Z_4}{3 - 2\sqrt{5}} \quad \frac{Z_5}{4 - 2\sqrt{5}}$$

□

Definition 2.5 Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *A zerlegbar*, falls es eine Partition der Indexmenge in nicht-leere Mengen I, J gibt, sodass $A_{i,j} = A_{j,i} = 0$ für alle $i \in I$ und $j \in J$. Äquivalent: Es gibt eine Umsortierung der Indizes, sodass A eine Blockdiagonalgestalt annimmt.

Es ist klar, dass die Matrix eines Coxetergraphen genau dann zerlegbar ist, wenn der Graph unzusammenhängend ist.

Lemma 2.6 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, positiv semi-definit und nicht zerlegbar und sei $A_{i,j} \leq 0$ für alle $i \neq j$. Dann gilt:

1. Die Dimension von $\text{kern}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n | x^T A x = 0\}$ ist 0 oder 1.
2. Der kleinste Eigenwert von A hat Vielfachheit eins, und es gibt einen Eigenvektor mit nur echt positiven Einträgen.

Beweis: ad (1): $\text{kern}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n | x^T A x = 0\}$ ist klar, da A diagonalisierbar ist. Sei nun $\dim(\text{kern}(A)) \geq 1$ und $0 \neq x \in \text{kern}(A)$. Sei außerdem \tilde{x} der Vektor, dessen Einträge die Beträge der Einträge von x sind. Wegen $A_{i,j} \leq 0 \forall i \neq j$ gilt

$$0 \leq \tilde{x}^T A \tilde{x} \leq x^T A x = 0.$$

Also ist $\tilde{x} \in \text{kern}(A)$. Wir zeigen nun, dass \tilde{x} (und damit auch x) keine 0-Einträge enthält. Sei dazu I die Menge der Indizes i sodass $\tilde{x}_i = 0$. Dann gilt für jedes $i \in I$:

$$\begin{aligned} 0 = (A\tilde{x})_i &= \sum_{j=1}^n A_{i,j} \tilde{x}_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin I}}^n \underbrace{A_{i,j}}_{\leq 0} \underbrace{\tilde{x}_j}_{> 0} \\ &\Rightarrow A_{i,j} = 0 \quad \forall i \in I, j \notin I \end{aligned}$$

Womit die Matrix zerlegbar ist, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $I = \emptyset$.

Wir haben damit gezeigt, dass jeder Vektor (außer 0) in $\text{kern}(A)$ keine 0-Einträge enthält. Wäre $\dim(\text{kern}(A)) \geq 2$, wäre es jedoch einfach, einen solchen Vektor zu finden.

ad (2): Sei d der kleinste Eigenwert von A (dieser ist nicht-negativ, da A positiv semi-definit ist). Dann erfüllt die Matrix $B := A - dI$ die Voraussetzungen für dieses Lemma. Da B singular ist, wird $\text{kern}(B)$ also von einem einzigen Vektor mit nur positiven Einträgen erzeugt. Da dieser Kern gerade der Eigenraum von A zum Eigenwert d ist, ist die Behauptung gezeigt. \square

Definition 2.7 Entfernt man in einem Coxetergraphen Knoten oder Kanten, oder verringert die Kantenmarkierungen, so nennen wir das Ergebnis einen Untergraphen.

Lemma 2.8 Sei Γ ein Coxetergraph mit positiv semi-definiter Matrix. Dann ist die Matrix jedes echten Untergraphen bereits positiv definit.

Beweis: Sei Γ' ein echter Untergraph von Γ und seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A' \in \mathbb{R}^{k \times k}$ mit $k \leq n$ die zugehörigen Matrizen. Mit geeigneter Sortierung der Spalten/Zeilen gilt also für alle $i, j \leq k$

$$\begin{aligned} m'_{i,j} &\leq m_{i,j} \\ \Rightarrow \cos(\pi/m'_{i,j}) &\leq \cos(\pi/m_{i,j}) \\ \Rightarrow a'_{i,j} &\geq a_{i,j} \end{aligned}$$

Angenommen A' ist nicht positiv definit. Dann gibt es ein $0 \neq x \in \mathbb{R}^k$ mit $x^T A x \leq 0$. Setze außerdem $x_i = 0$ für $k < i \leq n$, womit wir folgende Ungleichungskette erhalten:

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^n A_{i,j} |x_i| |x_j| \leq \sum_{i,j=1}^k A'_{i,j} |x_i| |x_j| \leq \sum_{i,j=1}^k A'_{i,j} x_i x_j \leq 0.$$

Womit jede der Summen 0 ist. Die erste Gleichheit besagt $x^T A x = 0$, womit nach Lemma 2.6 alle $x_i \neq 0$ sein müssen, also insbesondere $k = n$. Dann jedoch folgt aus der zweiten Gleichheit bereits $A' = A$. Damit ist $\Gamma' = \Gamma$ also kein echter Untergraph im Widerspruch zur Voraussetzung. \square

3 Klassifikation endlicher Spiegelungsgruppen

Satz 3.1 Sei Γ ein zusammenhängender Coxetergraph mit positiv semi-definiter Matrix. Dann ist Γ bereits einer der Graphen aus Abbildung 3(a) oder 3(b).

Beweis: Sei Γ ein zusammenhängender Coxetergraph mit positiv semi-definiter Matrix, der nicht in Abbildung 3 zu finden ist. Sei n die Anzahl Knoten in Γ und m die maximale Kantenmarkierung. Im Folgenden wird wiederholt Lemma 2.8 verwendet.

Die einzigen Graphen mit $n \in \{1, 2\}$ sind A_1 , $I_2(m)$ und \tilde{A}_1 , also ist $n \geq 3$. Da außerdem \tilde{A}_n und \tilde{A}_1 nicht als Untergraphen vorkommen können, ist Γ zykliefrei und $m < \infty$.

Fall 1: $m = 3$. Da $\Gamma \neq A_n$, muss mindestens ein Verzweigungspunkt existieren. Da kein \tilde{D}_n als Untergraph vorkommen kann, muss es genau einen Verzweigungspunkt geben, an dem sich genau drei Kanten treffen. Seien $1 \leq a \leq b \leq c$ die Anzahlen der Knoten in diese drei Richtungen.

- Da \tilde{E}_6 nicht als Untergraph vorkommt, ist $a = 1$
- Weil \tilde{E}_7 nicht als Untergraph vorkommt, und $\Gamma \neq D_n$ ist, muss $b = 2$ sein.
- Da \tilde{E}_8 nicht als Untergraph vorkommt, ist $c \leq 4$.

Damit bleiben nur noch die Möglichkeiten $\Gamma \in \{E_6, E_7, E_8\}$ übrig.

Fall 2: $m \geq 4$. Da \tilde{B}_n nicht als Untergraph vorkommt, gibt es überhaupt keine Verzweigungen und der ganze Graph ist nur eine lineare Kette von Punkten. Da auch \tilde{C}_n nicht Untergraph auftritt, gibt es nur genau eine Kante mit Markierung $m \geq 4$.

Fall 2a: $m = 4$. Da $\Gamma \neq B_n$, sind die beiden äußersten Kanten mit 3 markiert, das heißt die Kante mit Markierung 4 liegt im Inneren. Da \tilde{F}_4 kein Untergraph ist, muss $n = 4$ sein, und damit $\Gamma = F_4$.

Fall 2b: $m = 5$. Da Γ nicht Z_4 enthält, muss die Kante mit Markierung 5 am Rand des Graphen liegen. Da Γ außerdem auch Z_5 nicht enthält, muss $n \leq 4$ sein, wodurch nur noch die Möglichkeiten $\Gamma \in \{H_3, H_4\}$ übrig bleiben.

Fall 2c: $m \geq 6$. Da Γ nicht \tilde{G}_2 enthalten darf, ist dies unmöglich. □

Wir haben jetzt also gezeigt, dass die Graphen in Abbildung 3(a) die einzigen sind, die als Coxetergraph einer endlichen Spiegelungsgruppe vorkommen können. Es wurde jedoch nicht gezeigt, dass zu jedem dieser Graphen auch tatsächlich eine entsprechende Gruppe existiert. Dies wird in späteren Vorträgen (Kapitel 5 und 6 in [1]) geschehen.

Literatur

- [1] James E. Humphreys: *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge University Press (1990)