Prof. Dr. G. Nebe, Prof. Dr. E. Zerz
Dipl.-Math. D. Andres

SoSe 2011

Codes und Systemtheorie

Übungsblatt 9 – 10

Aufgaben 1–3 werden am 08.07.11 besprochen, Aufgaben 4–6 am 15.07.11.

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{C} \leq \mathbb{F}[z]^{1\times n}$ ein Faltungscode. Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}^\circ = \rho(\mathcal{C}^\perp)$ gilt.

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{C} \leq \mathbb{F}[z]^{1\times n}$ ein Faltungscode mit Komplexität δ und minimaler Realisierung (A, B, C, D), wobei $\det(A) \neq 0$ gelte. Bestimmen Sie eine minimale Realisierung von $\rho(\mathcal{C})$.

Aufgabe 3. Wir untersuchen, ob die Vereinigung der

$$\mathfrak{A}_{X,\hat{X}} = \{(u, y) \in \mathbb{F}^{1\times(k+(n-k))} \mid \hat{X} = XA + uC, y = XB + uD\}$$

disjunkt ist.

1. Bestimmen Sie die Anzahl der Knoten, Kanten und möglichen Kantenlabels des Zustandsgraphen einer minimalen Realisierung eines (n, k, δ)-Faltungscodes. Schließen Sie, dass $\delta \leq n - k$ eine notwendige Bedingung für Disjunktheit ist.
2. Überzeugen Sie sich anhand von
$$G = [z^2, 1, 1] \in \mathbb{F}_2[z]^{1\times 3}$$
davon, dass die Bedingung nicht hinreichend ist.
3. Zeigen Sie, dass die Vereinigung genau dann disjunkt ist, wenn B vollen Zeilenrang hat.

Aufgabe 4. Sei $\mathcal{C} = \mathcal{C}^\perp \leq \mathbb{F}[z]^{1\times n}$ ein selbstdualer Faltungscode. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{C}(0) := \{c(0) \mid c \in \mathcal{C}\} \leq \mathbb{F}^{1\times n} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}_{\max} := \{c^{(d)} \mid c = \sum_{t=0}^{d} c^{(t)} z^t \in \mathcal{C}\} \leq \mathbb{F}^{1\times n}$$

selbstduale lineare Blockcodes sind. Die Behauptung gilt auch unter der Voraussetzung $\mathcal{C} = \mathcal{C}^\circ$, da $(\rho(\mathcal{C}))(0) = \mathcal{C}_{\max}$ und $(\rho(\mathcal{C}))_{\max} = \mathcal{C}(0)$.

Aufgabe 5. Bestimmen Sie einen Zustandsgraphen für den Faltungscode $\mathcal{C} \leq \mathbb{F}_3[z]^{1\times 3}$ mit Erzeugermatrix

$$G := \begin{pmatrix} z^2+1 & z+2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und seinen dualen Code $\mathcal{C}^\perp$. Rechnen Sie für diese beiden Codes die MacWilliams-Identität nach.

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass

$$C_{\mathcal{C}} = \bigcup_{X,\hat{X}\in\mathbb{F}^\delta} \mathfrak{A}_{X,\hat{X}}.$$

Benutzen Sie die Steuerbarkeitsbedingungen, die eine minimale Realisierung von $\mathcal{C}$ erfüllt.