Prof. Dr. G. Nebe, Prof. Dr. E. Zerz
Dipl.-Math. D. Andres SoSe 2011

Codes und Systemtheorie

Übungsblatt 8

Dieses Übungsblatt wird am 01.07.11 besprochen.

Aufgabe 1. Sei g ein Polynom vom Grad $n(\delta_1 + 1) - l$, wobei $n, l \geq 1$ und $\delta_1 \geq 0$. Betrachten wir die Zerlegung $g = \sum_{i=0}^{n-1} g_i(z^n)z^i$ und

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & g_1 & \cdots & \cdots & \cdots & g_{n-1} \\ zg_{n-1} & g_0 & \cdots & \cdots & \cdots & g_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ zg_{n-k+1} & \cdots & zg_{n-1} & g_0 & \cdots & g_{n-k} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}[z]^{k \times n}.$$

Zeigen Sie:

1. Es gilt $\deg(g_i) \leq \delta_1$ für alle $0 \leq i \leq n-1$.
2. Falls $i \geq n - l + 1$, dann gilt sogar $\deg(g_i) < \delta_1$.
3. Der Zeilengrad der ersten l Zeilen von G ist höchstens gleich δ_1. Der Zeilengrad der übrigen $k - l$ Zeilen von G ist höchstens gleich $\delta_1 + 1$.

Damit kann man zeigen, dass die Komplexität des von G erzeugten Faltungscodes höchstens $k(\delta_1 + 1) - l$ ist. Mit den Bezeichnungen aus der Vorlesung gilt also $\delta' \leq \delta$.

Aufgabe 2. Sei $n \geq k \geq 1$. Das Polynom f habe die Gestalt $f = \sum_{i=0}^{k-1} f_i(z^n)z^i$. Zeigen Sie: Wenn f mindestens k Nullstellen hat, die in derselben n-Äquivalenzklasse liegen, dann sind alle Elemente dieser Äquivalenzklasse Nullstellen von f.

Aufgabe 3. Sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper der Charakteristik p und C der zyklische Block-Code der Länge $n = p$, der von $(z-1)^{p-k}$ erzeugt wird, wobei $1 \leq k \leq p$. Zeigen Sie, dass C maximale freie Distanz hat (also $n - k + 1$).
Hinweis: Verwenden Sie die binomiale Identität $\sum_{i=0}^{r} (-1)^i i^s \binom{r}{i} = 0$ für alle $0 \leq s < r$ zur Konstruktion einer Kontrollmatrix H.
Folgern Sie für $f \in \mathbb{F}[z]$ und $0 \leq M < p$:

$$\mathrm{wt}((z-1)^M \cdot f) \geq \mathrm{wt}((z-1)^M) \cdot \mathrm{wt}(f(1))$$

(Spezialfall von Lemma 1.32 mit $N = 1$ und $M < p$).