Prof. Dr. G. Nebe, Prof. Dr. E. Zerz
Dipl.-Math. D. Andres SoSe 2011

Codes und Systemtheorie

Übungsblatt 7

Dieses Übungsblatt wird am 10.06.11 besprochen.

Aufgabe 1. Sei F ein Ring und U ein F-Linksmodul. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. Für alle F-Linksmoduln M, N und alle $f \in \mathrm{Hom}_F(N, M)$ gilt: Aus $\varphi \circ f = 0$ für alle $\varphi \in \mathrm{Hom}_F(M, U)$ folgt $f = 0$.
2. Für alle F-Linksmoduln M gilt: $\bigcap_{\varphi \in \mathrm{Hom}_F(M,U)} \ker(\varphi) = 0$.

Wenn die äquivalenten Bedingungen erfüllt sind, nennt man U einen *Kogenerator*. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. F als F-Linksmodul ist ein Kogenerator.
2. Für alle F-Linksmoduln M gilt: Der natürliche Homomorphismus $M \to M^{**}$ ist injektiv. (Dann nennt man M *torsionslos*.)

Dabei bezeichnet N^* den zum Links-(Rechts-)modul N dualen Rechts-(Links-)modul $N^* = \mathrm{Hom}_F(N, F)$. Der natürliche Homomorphismus von M nach M^{**} ist

$$M \to M^{**}, \quad m \mapsto \left\{ \begin{array}{ccc} M^* & \to & F \\ \varphi & \mapsto & \varphi(m). \end{array} \right.$$

Aufgabe 2. Sei R ein (rechts und links) Noetherscher Ring, $G \in R^{k \times n}$ und $M = R^{1 \times n}/R^{1 \times k}G$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. M ist torsionslos.
2. $\mathrm{im}(\cdot G) = \ker(\cdot H)$ für ein $H \in R^{n \times m}$.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie möglichst kleine Körper sowie die Parameter des zugrundeliegenden Block-Codes für die Konstruktion von Faltungscodes mit maximaler freier Distanz, wobei $(n, k, \delta) =$
(a) $(3, 2, 5)$ mit vorgegebener Charakteristik $p = 2$ bzw. $p = 5$,
(b) $(5, 2, 12)$ mit beliebiger Charakteristik.