Prof. Dr. G. Nebe, Prof. Dr. E. Zerz
Dipl.-Math. D. Andres

SoSe 2011

Codes und Systemtheorie

Übungsblatt 4

Dieses Übungsblatt wird am 20.05.11 besprochen.

Sei F ein Körper.

Aufgabe 1. Sei $H \in F[z]^{k\times k}$ mit $\det(H) \neq 0$. Zeigen Sie, dass

$$\deg\det(H) = \dim_F(F[z]^{1\times k}/F[z]^{1\times k}H).$$

Geben Sie ein Beispiel für zwei Matrizen H_1, H_2 mit derselben Smith-Form, aber verschiedenen Kronecker-Indizes.

Sei $G \in F[z]^{k\times n}$ und $C = F[z]^{1\times k}G$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Wenn die Zeilen von G eine minimale Gröbner-Basis von C sind (bezüglich der TOP-Ordnung), dann ist G zeilenreduziert. Wie sieht es mit der Umkehrung aus?

Aufgabe 3. Formulieren Sie (in Anlehnung an den "vorhersagbaren Grad" aus der Vorlesung) eine Eigenschaft "vorhersagbarer Vektorgrad", die äquivalent dazu ist, dass die Zeilen von G eine minimale Gröbner-Basis von C sind.

Definition. Die TOP-Ordnung auf $\mathbb{N}_0 \times \{1,\dots,n\}$ ist definiert durch

$$(l,i) <_{\mathrm{TOP}} (m,j) \Leftrightarrow l < m \text{ oder } (l = m \text{ und } i < j)$$

für alle $l,m \in \mathbb{N}_0$ und $i,j \in \{1,\dots,n\}$. Damit kann man jedem Element $0 \neq g = \sum_{l\in\mathbb{N}_0}\sum_{i=1}^n g_{l,i}z^l e_i \in F[z]^{1\times n}$ mit $g_{l,i} \in F$ einen Vektorgrad

$$\mathrm{vdeg}(g) = \max_{<_{\mathrm{TOP}}}\{(l,i) \mid g_{l,i} \neq 0\}$$

zuordnen. Eine Gröbner-Basis (GB) von C ist eine endliche Teilmenge $\mathcal{G}$ von $C \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft: Zu jedem $0 \neq c \in C$ gibt es ein $g \in \mathcal{G}$ mit $\mathrm{vdeg}(c) = \mathrm{vdeg}(g) + (l,0)$ für ein $l \in \mathbb{N}_0$. Eine Gröbner-Basis heißt minimal, wenn man keines ihrer Elemente weglassen kann, ohne dass die GB-Eigenschaft verloren geht, d.h., $\mathcal{G}$ ist minimal, wenn es kein $g \neq h \in \mathcal{G}$ gibt mit $\mathrm{vdeg}(h) = \mathrm{vdeg}(g) + (l,0)$ für ein $l \in \mathbb{N}_0$.