Unendlich kleine und unendlich große Zahlen

Ulrich Schoenwaelder
Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen
Vortrag Ritzefeld-Gymnasium Stolberg (Rhld.), 24. Mai 2000

Mathematik ist die Wissenschaft des Unendlichen. Auch wenn diese Aussage nur auf Teile der Mathematik zutrifft, so weist sie doch auf einen typischen Aspekt hin: die Mathematik handelt u. a. von unendlichen Mengen, von unendlich weit ausgedehnten geometrischen Gebilden, von unendlich langen Dezimalzahlen (die reelle Zahlen darstellen) und auch von unendlich kleinen und unendlich großen Zahlen. Vorstellungen über unendliche Zahlen haben die Entwicklung der Mathematik, insbesondere die Theorie der Funktionen zur Beschreibung von Bewegungsabläufen, die sog. Analysis, wesentlich beeinflußt und werden es auch in Zukunft wieder tun. Ich will diese Vortragsausarbeitung den folgenden beiden Fragen widmen.

Gibt es unendlich kleine und unendlich große Zahlen?

Was sollen solche Zahlen?

1. Natürliche Zahlen

Wir wenden uns zunächst der zweiten Frage zu, erstellen sozusagen einen Steckbrief für ein Zahlsystem mit „unendlichen" Zahlen. Das gelingt am besten, wenn wir uns zum Zweck der späteren Verallgemeinerung die entsprechende Frage an die uns vertrauteren Zahlsysteme

$\mathbb{N}$ (natürliche Zahlen), $\mathbb{Z}$ (ganze Zahlen),
$\mathbb{Q}$ (rationale Zahlen), $\mathbb{R}$ (reelle Zahlen)

stellen: was sollen diese Zahlsysteme?

Zahlen dienen zum Zählen, Messen, Rechnen!

Gezählt werden zunächst reale Objekte wie Äpfel, Birnen, ... Aus zwei Äpfeln, zwei Birnen, ... bildet man die abstrakte

Zahl 2 (zwei);

genauso für 1, 3, 4, ..., 12. Aber werden so auch die Zahlen

1 000 000 und $2^{1000003} + 1$

eingeführt? Sicher nicht: niemand kann sich genau eine Million Äpfel und genau eine Million Birnen usw. vorstellen und daraus die Zahl 1 000 000 abstrahieren. Das Wesentliche am System $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen besteht darin, daß **nach** jeder natürlichen Zahl n eine Nachfolgezahl n' folgt (auf 2 folgt 3, auf 999 999 folgt 1 000 000).

Dabei sind die folgenden beiden Regeln erfüllt.

(i) $1 \in \mathbb{N}$, und jede Zahl $z \in \mathbb{N}$ außer $z = 1$ ist Nachfolger $z = y'$ von genau einer Zahl $y \in \mathbb{N}$.

(ii) Die einzige Teilmenge $T \subseteq \mathbb{N}$, die 1 enthält und mit jeder Zahl $t \in T$ auch den Nachfolger t', ist die ganze Menge $T = \mathbb{N}$.

Diese Regeln nennt man die Peano-Axiome für $\mathbb{N}$ nach Giuseppe Peano (1858–1932 [10]) [1]. Die Regel (ii) ist das sog. Induktionsprinzip; sie gestattet, iterative Definitionen und Beweise über alle Zahlen in $\mathbb{N}$ zu führen. Insbesondere kann man mit den Peano-Axiomen die Addition $+$ und die Multiplikation $\cdot$ sowie die Relation $<$ für die Zahlen in $\mathbb{N}$ rein formal ohne Rückgriff auf die Anschauung **einführen** und die folgenden Regeln über sie **beweisen**.

(a) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

(b) $x + y = y + x$,

(c) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,

(d) $x \cdot y = y \cdot x$,

(e) $x + 1 = x'$, $x \cdot 1 = x$, $x < x'$,

(f) aus $x < y$ folgt $x + z < y + z$ und $x \cdot z < y \cdot z$

für alle x, y, z. Der formale Nachweis dieser Regeln ist ziemlich langwierig und für die Schule nicht angebracht. Gemäß diesen Regeln kann man jedoch auch mit beliebig großen natürlichen Zahlen sicher rechnen $(+, \cdot)$ und sie der Größe nach vergleichen $(<)$.

Eine Rechnung mit (abstrakten) natürlichen Zahlen hat in der Regel einen realen Hintergrund (über Äpfel oder D-Mark); es wäre aber lästig bis unmöglich, diese Rechnung mit realen Äpfeln oder DM-Scheinen im einzelnen nachzuvollziehen, indem man $+$ durch „Zusammenlegen“, $\cdot$ durch „vielfaches Zusammenlegen (in Rechteckform)“ und $<$ durch „weniger als“ darstellt. An diesem Beispiel des formalen Zahlsystems $\mathbb{N}$ sieht man sehr schön, wie durch wenige Regeln der Umgang mit den Zahlen des Systems geregelt wird und wie diese Zahlen bei geeigneter Interpretation der Rechenoperationen für den Umgang mit realen Objekten nützlich sind.

Entsprechend könnte man jetzt vollständige Axiomensysteme für die Zahlsysteme $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ angeben (vgl. [1]). Ich will jedoch für später nur darauf hinweisen, daß man in den Zahlsystemen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ ausgezeichnete Elemente 0 und 1, Rechenoperationen $+, \cdot, -$ und $^{-1}$ sowie eine Relation $<$ hat, für die die Regeln (a) bis (d) sowie die folgenden Regeln (Axiome) gelten.

(e') $x + 0 = x$, $x \cdot 1 = x$,

(f') aus $x < y$ folgt $x + z < y + z$,

(g) aus $x < y$ folgt $x \cdot z < y \cdot z$, falls $0 < z$ gilt,

(h) $x + (-x) = 0$, $x \cdot (x^{-1}) = 1$.

Die Interpretation der rationalen Zahlen beruht auf dem Unterteilen (etwa Halbieren) von realen Objekten. Die rationalen Zahlen reichen zum Messen physikalischer Größen völlig aus. Je nach Meßgenauigkeit wird man feststellen, daß die Länge der Diagonalen eines Quadrates mit der Seitenlänge von 1 Einheit gerade $\frac{14}{10}$ Einheiten oder $\frac{141}{100}$ Einheiten usw. beträgt. Im Rahmen einer Theorie für diese Diagonale und den formalen rechnerischen Umgang ist es jedoch wichtig, die nichtrationale **Zahl** $\sqrt{2}$ zur Verfügung zu haben. Man hat sie im Zahlsystem $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

Wenn ich nun fragte „Gibt es reelle Zahlen?“, so werden Sie vielleicht sagen: „Was soll die Frage? Ich habe mich an das Rechnen mit reellen Zahlen gewöhnt und weiß, sie in der realen Welt zu interpretieren. Das reicht mir.“ Eine entsprechende Haltung nahmen Mathematiker [10] seit dem 17. Jahrhundert gegenüber reellen sowie „unendlich kleinen“ und „unendlich großen Zahlen“ ein:

Isaac Newton (1643–1727),

Gottfried von Leibniz (1646–1716),

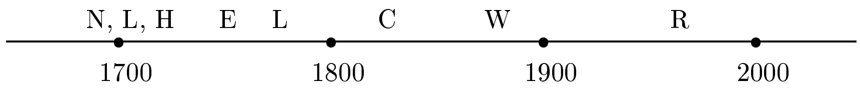
Guillaume de L'Hôpital (1661–1704),

Leonhard Euler (1707–1783),

Joseph–Louis Lagrange (1736–1813),

Carl Friedrich Gauss (1777–1855),

Augustin Louis Cauchy (1789–1857).



2. Wozu unendlich kleine Zahlen?

Wozu soll man noch weitere („unendliche“) Zahlen benutzen? Welche Eigenschaften sollte ein solches Zahlsystem haben? Kann man ein solches Zahlsystem rein formal konstruieren (und so seine Existenz demonstrieren)?

Ich möchte mich jetzt diesen Fragen der Reihe nach zuwenden. Zunächst zur **Idee** unendlich kleiner Zahlen an einem zentralen Beispiel.

Ich zeichne ein Kurvenstück mit dicker Kreide an die Tafel: es entstehen reale Kreidehaufen an der Wandtafel. Ich markiere eine Stelle auf dieser Kreidekurve und bitte einen Schüler, mit Hilfe des Lineals die „Tangente“ an die Kurve durch die markierte Stelle zu ziehen. Er legt das Lineal an, schaut, wackelt nocht leicht mit dem Lineal und sagt „So!“ (zieht die Kreide an dem Lineal entlang). Wir sind uns einig, daß er „die Tangente“ gezeichnet hat. Aber **was ist** eine Tangente? Welche Gerade durch den markierten Punkt soll Tangente heißen? Auf der praktischen Ebene kann man sich in jedem Einzelfall einigen.

Ich will nun diskutieren, wie man den Begriff auf der abstrakten theoretischen Ebene **definieren** kann, und zwar unter Verwendung unendlich kleiner Zahlen.

Die Kreidekurve wird auf theoretischer Ebene am einfachsten durch eine (stetige, ..?) Funktion $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ beschrieben:

$$K = \{(x, f(x) \mid x \in I\}.$$

Die markierte Stelle entspricht einem Zahlenpaar („Punkt“) $P_0 = (x_0, f(x_0))$ für ein x_0 im Innern des Intervalls I. Jede Gerade durch P_0 hat die Form

$$g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid ax + by + c = 0\}$$

für gewisse reelle Zahlen a, b, c, die den Bedingungen

$$ax_0 + bf(x_0) + c = 0 \text{ und } (a, b) \neq (0, 0)$$

genügen (P_0 liegt auf K und auf g). Welche von diesen Geraden soll Tangente heißen?

Jeder erwartet, daß man die gesuchte Tangente „in der Nähe“ von Sekanten s durch P_0 und benachbarte Kurvenpunkte $P_1 = (x_1, f(x_1))$ findet:

$$s = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid ax + by + c = 0\},$$

wobei

$$ax_0 + bf(x_0) + c = 0,$$
$$ax_1 + bf(x_1) + c = 0$$

für die gesuchten Koeffizienten a, b, c gilt. In der Regel hat dieses Gleichungssystem eine Lösung (a, b, c), wo $b \neq 0$ ist. Dann ist auch $(\frac{a}{b}, 1, \frac{c}{b})$ eine Lösung, und die Gleichung für s kann in der Form

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} =: mx + n$$

geschrieben werden, wo

$$m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

ist. Wenn nun x_1 „in der Nähe von”x_0 variiert, wird der Wert m um den m–Wert m_0 für die gesuchte Tangente variieren. Man bezeichnet die Abweichung von x_1 vom festen Wert x_0 mit h:

$$x_1 = x_0 + h.$$

Dann ist

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

für die Sekante durch P_1 der übliche Differenzenquotient.

Der erst seit ca. 1850 beschrittene Weg, den m–Wert für die Tangente zu definieren, besteht darin, einen „Grenzwert“ für h gegen 0 zu bilden. Dieser

Begriff des Grenzwerts wurde im 19. Jahrhundert präzisiert (A. Cauchy, K. Weierstrass (1815–1897)) und seitdem in der formal und theoretisch orientierten Mathematik verwendet. Auch in der Schule versucht man, diesen Begriff – in unterschiedlichen Graden der Präzision – zu vermitteln.

Die Meister des 17. und 18. Jahrhunderts jedoch hatten eine andere Vorstellung für die Lösung des Tangenten(steigungs)problems. Sie dachten etwa:

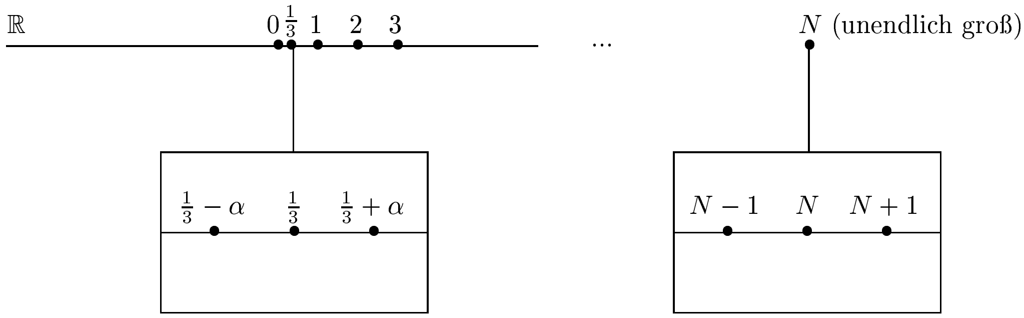
> „Wenn h sich nur unendlich wenig ändert, dann sollte sich auch m nur unendlich wenig ändern. Also suchen wir eine (reelle) Zahl m_0, so daß
> $$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
> nur 'unendlich wenig' von m_0 abweicht, wenn immer h 'unendlich wenig' von 0 abweicht. Ein solches m_0 wird als die Tangentensteigung in P_0 definiert."

In der realen Interpretation der Kreidekurve kann man dies so formulieren: wenn der Schüler „unendlich wenig" mit dem Lineal wackelt (Sekanten durch unendlich nahe Punkte), bleibt die nächstgelegene Gerade durch P_0 mit **reeller** Steigung stets dieselbe. Sie soll Tangente heißen.

Jetzt müssen wir noch wissen, was eine Zahl sein soll, die „unendlich wenig von 0 abweicht", damit das Vorstehende überhaupt einen Sinn bekommt. Das ist sicher keine reelle Zahl; denn jede reelle positive Zahl ist größer als eine evtl. ziemlich kleine, aber jedenfalls positive rationale Zahl. [Die Idee, 'beliebig kleine' rationale oder reelle Zahlen zu betrachten, führt schließlich zum Grenzwertbegriff. Diese Idee ist mit 'unendlich kleinen' Zahlen aber nicht gemeint. Vielmehr brauchen wir neue, zusätzliche Zahlen.]

Im Sinne einer abstrakten Definition von Zahlen wie in Abschnitt 1 sucht man eine Menge U von (irgendwelchen) mathematischen Objekten, mit denen man wie in $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ rechnen und vergleichen kann (also mit Operationen $+$, 0, $-$, $\cdot$, 1, $:$ und einer Relation $<$, die den Rechenregeln (a) bis (h) von oben genügen), mit einer Teilmenge R, die den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ entspricht ($R \cong \mathbb{R}$), und weiteren neuen Elementen (in $U \setminus R$). Dann gibt es auch neue Elemente ($\notin R$), deren Betrag kleiner als jede positive reelle Zahl ($\in R$) ist. Diese Zahlen in U nennen wir **unendlich kleine** Zahlen. Der Kehrwert α^{-1} einer unendlich kleinen positiven Zahl $\alpha \in U$ ist dann, wie leicht aus den Regeln folgt, größer als jede Zahl aus $\mathbb{R}$, eine sog. **unendlich große** Zahl. Ist die Differenz $x - y$ von Zahlen x, y aus U unendlich klein, so nennen wir x und y unendlich nahe beieinander und schreiben $x \approx y$. Zu Ehren von Leibniz nennt man $\{z \in U \mid z \approx x \text{ oder } z = x\}$ die **Monade** von $x \in U$. Die Menge $\{z \in U \mid \text{es gibt } r \in R, \text{ so daß } |x - z| < r \text{ ist}\}$ heißt die **Galaxie** von $x \in U$. Mit diesen Definitionen für jedes solche System U erhält das Wort *unendlich* einen ganz präzisen Sinn in einer speziellen Situation.

Wir können uns ein solches System U etwa so veranschaulichen:



Teil der Monade von $\frac{1}{3}$
unter Mikroskop mit
unendlicher Vergrößerung

Teil der Galaxie von N
unter Fernrohr mit
unendlicher Verkleinerung

Unter Verwendung des $R \cong \mathbb{R}$ umfassenden Systems U erhält der Begriff „Tangentensteigung der Funktion $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in I$" die folgende Definition (siehe oben):

> Die reelle Zahl m_0 heißt **Tangentensteigung von f bei** x_0, wenn $m = \frac{f(x_0+\alpha)-f(x_0)}{\alpha} \approx m_0$ ist für alle $\alpha \approx 0$ in U.

Leibniz schreibt $y = f(x)$ und dx statt $\alpha \approx 0$ sowie dy statt $f(x_0 + dx) - f(x_0)$ („Differentiale"). Wir erhalten den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} \approx m_0$ und setzen $f'(x_0) := m_0$ („Ableitung" an der Stelle x_0).

Diese Definition von $\frac{dy}{dx}$ und $f'(x_0)$ hat nur noch einen Mangel: das Symbol $f(x_0 + \alpha)$ ist überhaupt nicht erklärt, da f nur für Zahlen aus $I \subseteq \mathbb{R}$ bzw. die entsprechenden Elemente aus R erklärt ist, aber nicht für die ihnen unendlich nahen neuen Elemente (wie $x_0 + \alpha$) aus U. Man muß f noch auf der Monade von x_0 erklären; die hier f fortsetzende Funktion soll ${}^*f$ heißen. Ist f für reelle Zahlen durch ein Polynom erklärt, z. B. $f = p$ für

> $p(x) = x^2 + 2x - 1$ für alle $x \in R$ (oder $\mathbb{R}$),

so wird man f für beliebige Zahlen aus U entsprechend erklären:

> ${}^*p(z) = z^2 + 2z - 1$ für alle $z \in U$;

man kann ja in U rechnen wie in $\mathbb{R}$.

Für komplizierter definierte Funktionen, etwa $f(x) = \sqrt{x}$, muß man in der Lage sein, gültige Aussagen über reelle Zahlen in analoge gültige Aussagen über U zu übertragen: um etwa ${}^*f(x) = {}^*\sqrt{x}$ für positive $x \in U$ definieren zu können, braucht man zu der in $\mathbb{R}$ gültigen Aussage

> „Zu jeder positiven reellen Zahl x gibt es genau eine positive reelle Zahl y, deren Quadrat x ist.“

die in U gültige Aussage

> „Zu jeder positiven Zahl $x \in U$ gibt es genau eine positive Zahl $y \in U$, deren Quadrat x ist.”

Was ich allgemein hiermit meine, kann man im Rahmen der mathematischen Logik präzisieren. Jedenfalls handelt es sich um eine weitere und weitreichende Forderung an das Zahlsystem U. Erst in der Mitte des 20. Jahrhunderts wurde ein solches Zahlsystem (mengentheoretisch) kostruiert (Abraham Robinson (1918–1974) [10]) [11, 2, 3], das System ${}^*\mathbb{R}$ der sog. **hyperreellen Zahlen**. Ein Axiomensystem für ${}^*\mathbb{R}$ stammt von E. Nelson [9]. Man hat hier zu jeder Funktion f auf $\mathbb{R}$ eine f auf ${}^*\mathbb{R}$ fortsetzende Funktion ${}^*f$, wie man es zur Definition von $\frac{dy}{dx}|_{x_0}$ und $f'(x_0)$ benötigt.

Ich berechne jetzt als Beispiel $f'(1)$ für obige Funktion $f = p$ an der Stelle $x_0 = 1$. Für beliebige $\alpha \approx 0$ in $U = {}^*\mathbb{R}$ ist

$$\frac{{}^*f(1+\alpha) - f(1)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}[(1+\alpha)^2 + 2(1+\alpha) - 1 - (1^2 + 2 \cdot 1 - 1)]$$

$$= \frac{1}{\alpha}[1 + 2\alpha + \alpha^2 + 2 + 2\alpha - 1 - 2] = \frac{1}{\alpha}[\alpha^2 + 4\alpha] = \alpha + 4 \approx 4,$$

d. h., $m_0 = f'(1) = 4$ ist (nach Definition) die Tangentensteigung von p an der Stelle $x_0 = 1$. Die Ermittlung von $f'(x_0) = m_0$ ist auf das Rechnen in ${}^*\mathbb{R}$ zurückgeführt!

Weiteres Bespiel: welche Ableitung hat $f(x) = \sqrt{x}$ an einer positiven Stelle $x \in \mathbb{R}$? In ${}^*\mathbb{R}$ ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{{}^*\sqrt{x+dx} - \sqrt{x}}{dx} = \frac{({}^*\sqrt{x+dx} - \sqrt{x})({}^*\sqrt{x+dx} + \sqrt{x})}{dx({}^*\sqrt{x+dx} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{(x+dx) - x}{dx({}^*\sqrt{x+dx} + \sqrt{x})} = \frac{1}{{}^*\sqrt{x+dx} + \sqrt{x}} \approx \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ für alle } dx \approx 0.$$

Also gilt $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \in \mathbb{R}$.

Wenn man bedenkt, daß die heutige Mathematik und ihre Anwendung in Naturwissenschaften, Technik und Sozialwissenschaften ohne den Begriff des Differentialquotienten und der Ableitung und ohne die damit formulierten Differentialgleichungen für gesuchte Funktionen undenkbar ist, kann man ermessen, wie grundlegend die hier dargestellte Präzisierung der Vorstellung von unendlich kleinen Zahlen ist, auch wenn historisch seit der Mitte des 19. Jahrhunderts ein anderer Weg zum Differenzieren (über Grenzwerte) eingeschlagen wurde.

3. Cauchy-Zahlen

Leider kann ich die **Konstruktion** der hyperreellen Zahlen $^*\mathbb{R}$ hier nicht vormachen. Man erhält aber ein Gefühl für $^*\mathbb{R}$, wenn man ein ähnliches System $^\omega\mathbb{R}$, das der sog. **Cauchy-Zahlen**, konstruiert [4, 5, 6, 7, 8]. (Es erfüllt aber nicht alle oben genannten Forderungen an U.) Zu diesem Zweck bilden wir zunächst zu jeder reellen Zahl $r \in \mathbb{R}$ die konstante Funktion $\underline{r}$: $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ mit Wert r:

$$\underline{r} = (x \longmapsto r \text{ für alle } 0 < x \in \mathbb{R}).$$

Deren Gesamtheit ist

$$R := \{\underline{r} \mid r \in \mathbb{R}\}.$$

Bekanntlich kann man Funktionen addieren, subtrahieren und multiplizieren: wenn $*$ eine der Operationen $+, -, \cdot$ bedeutet, definiert man

$$f * g = (x \longmapsto f(x) * g(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}_+).$$

[Dividieren geht nicht allgemein, da $g(x)$ für gewisse x gleich 0 sein kann.] In R rechnet man also analog zu $\mathbb{R}$ ($R \cong \mathbb{R}$). Zu R nehmen wir jetzt noch die nichtkonstanten rationalen Funktionen auf $\mathbb{R}_+$ hinzu, also die Quotienten von Polynomfunktionen, insbesondere

$$\omega = (x \longmapsto x \text{ für } x \in \mathbb{R}_+).$$

Aus R und ω kann man nämlich jede Polynomfunktion algebraisch aufbauen: z. B. ist die Funktion $g(x) = x^2 - 2x + 3$ gerade

$$g = \omega^2 - 2\omega + \underline{3}.$$

Wir erhalten so das System C aller rationalen Funktionen auf $\mathbb{R}_+$.

Jetzt wollen wir die rationalen Funktionen (also die Elemente von C) noch der Größe nach vergleichen können. Dafür soll – das machen wir einfach so – das Verhalten der Funktionen in der Nähe von 0, genauer in einem (kleinen) Intervall $(0,t) \subseteq \mathbb{R}_+$ ausschlaggebend sein. Wir definieren für $p, q \in C$:

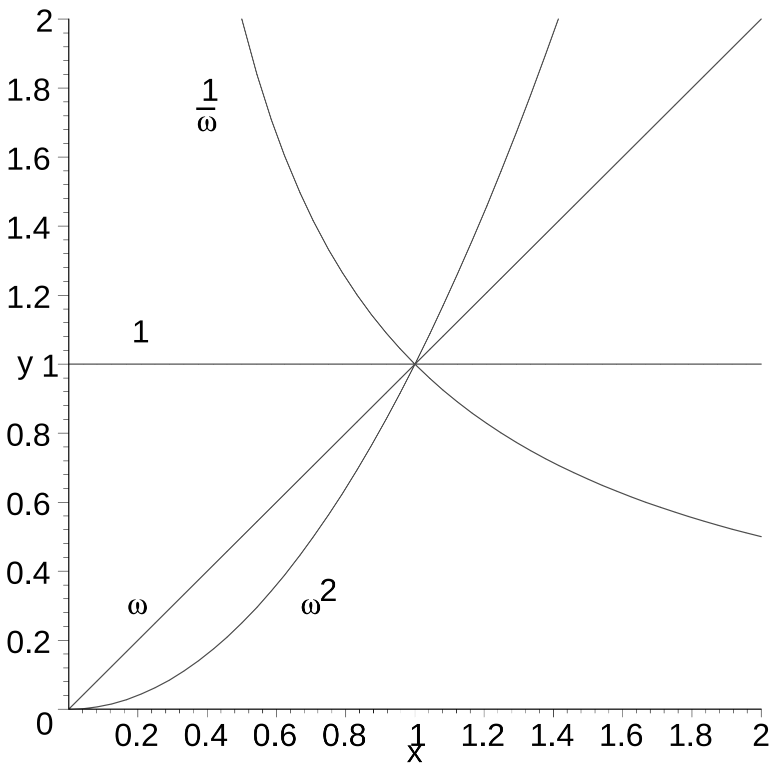
> $p < q$, falls ein $0 < t \in \mathbb{R}$ existiert, so daß
> $p(x) < q(x)$ für alle x im reellen Intervall $(0,t)$ gilt.

Z. B. ist $\underline{r} < \underline{s}$ in R für reelle Zahlen $r, s \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $r < s$ in $\mathbb{R}$ gilt. Man hat

$$0 < \omega < \underline{r} \text{ für alle positiven reellen } r,$$

also für alle $\underline{0} < \underline{r} \in R$; d. h., ω ist ein unendlich kleines Element („Zahl“) von C (bezgl. R), und $\frac{1}{\omega}$ kann gebildet werden und ist ein unendlich großes Element („Zahl“) von C. Das System C ist ein neues Zahlsystem, das unendlich kleine und unendlich große Zahlen aufweist. Man kann hier jede rationale Funktion f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ fortsetzen zu einer Funktion ${}^{\omega}f$: $C \longrightarrow C$ auf C; man setzt für „Zahlen“ $p \in C$:

$${}^{\omega}f(p) := f \circ p := (x \longmapsto f(p(x)) \text{ für } x \in \mathbb{R}_+) \in C.$$



Mit diesem System C läßt sich die Differentialrechnung im Sinne von Leibniz und Cauchy in heute üblicher Strenge für rationale Funktionen ohne Grenzwert-Begriff aufbauen. Bei Vergrößerung von C zu ${}^{\omega}\mathbb{R}$ durch Hinzunahme weiterer Funktionen, die rechts von 0 ein Stück weit nur positiv sind, werden weitere Funktionen differenzierbar. (Da es beim Vergleich von Elementen des Systems nur auf die Funktionswerte ein Stück weit rechts von 0 ankommt, beschreiben Funktionen, die nur ein Stück weit rechts von 0 übereinstimmen, dasselbe Element des Systems ${}^{\omega}\mathbb{R}$ der „Cauchy-Zahlen".)

Sie sehen, daß unendliche Zahlen nichts Unheimliches sind.

Literatur

[1] B. Artmann. *Der Zahlbegriff.* Moderne Mathematik in elementarer Darstellung 19. Vandenhoeck & Ruprecht, 1983. HB: Bb1126-19. Mit historischen Hinweisen. Kap. 7: Nonstandard–Zahlen.

[2] Howard Jerome Keisler. *Elementary Calculus: An Approach Using Infinitesimals.* Prindle, Weber and Schmidt, Boston, 1976. Lst. II. HBZ: 61-D. Für den Schüler.

[3] Howard Jerome Keisler. *Foundations of Infinitesimal Calculus.* Prindle, Weber and Schmidt, Boston, 1976. Lst. II. Für den Lehrer.

[4] Detlef Laugwitz. Nichtstandard-Mathematik, begründet durch eine Verallgemeinerung der Körpererweiterung. *Expositiones Math.*, 4:307–333, 1983. Ω–Zahlen.

[5] Detlef Laugwitz. *Zahlen und Kontinuum: Eine Einführung in die Infinitesimalmathematik.* Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik, Band 5. Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt; BI, Zürich, 1986. MB: 13209. HB: Bf7905. Literaturangaben auf S. 250 ff.
Telegraphic Review: Amer. Math. Monthly 95:3 (1988), 274 (An introduction to nonstandard analysis based on the adjunction of an ideal element to the reals and intended for teachers. Many historical and philosophical remarks). Review: Praxis der Mathematik 30:2 (1988), 125–126.

[6] Detlef Laugwitz. Infinitely small quantities in Cauchy's textbooks. *Historia math.*, 14:258–274, 1987. ISSN 0315-0860.

[7] Detlef Laugwitz. Cauchy–Zahlen als Grundlage der Infinitesimalmathematik. *Mathematische Semesterberichte*, 38:175–213, 1991. HB: Z1538 ZNT.

[8] Detlef Laugwitz. Zur historischen Entwicklung der Infinitesimalmathematik. *Der Mathematikunterricht*, 43(1):5–23, 1997. HB: Z5577.

[9] E. Nelson. Internal set theory: A new approach to nonstandard analysis. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83(6):1165–1198, 1977. MB.

[10] John J. O'Connor and Edmund F. Robertson. The MacTutor History of Mathematics archive. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html, August 2000. See Biographies Index.

[11] Abraham Robinson. *Non–Standard Analysis.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North–Holland, 1966, ^{2}1970. MB: 6878. Historisch das grundlegende Werk. Ch. X: Zur Geschichte des Infinitesimalen (S. 260–282).