Spitz und stumpf: tangentiale Funktionsgraphen

U. Schoenwaelder (3.3.00) nach einer Idee von M. Gebhardt (26.2.00)

Problem. Wir untersuchen reelle Funktionen, die an einer festen Stelle x_0 denselben Funktionswert y_0 haben. Wann berühren sich die Funktionsgraphen? Wie stark berühren sie sich? [Vorbereitung des Ableitungsbegriffes.]

Ideen. 1. Wir können $x_0 = 0$ annehmen. [Wir beherrschen das horizontale Verschieben von Funktionsgraphen theoretisch und rechnerisch via DERIVE.]
2. Wir können $y_0 = 0$ annehmen. [Wir beherrschen das vertikale Verschieben von Funktionsgraphen.]
3. Wenn sich die Funktionen f und g im Nullpunkt „berühren", ist die Differenzfunktion $d \coloneqq f - g$ „sehr klein". Sie „berührt" die x–Achse [Beispiele mit DERIVE]: sie läuft „spitz" in den Nullpunkt.
4. Wir beschränken den Definitionsbereich auf nichtnegative x.

Plan. Untersuche die Potenzfunktionen $p_i = (x \mapsto x^i)$, $i = 0, 1, 2, ...$ und $i = 1/2, 1/3, ...$, $i = -1, -2, ...$ in einer Umgebung („in der Nähe von") 0 auf Spitzheit. Miteinander vergleichen!

Durchführung. Beginne mit p_0, p_1, p_2. Die Funktion p_0 hat $p_0(0) = 1 \neq 0$, fällt raus. Die Skizze (DERIVE) für p_1 und p_2 zeigt: für $1 \leq x$ ist $p_1(x) \leq p_2(x)$, aber „bei $x = 0$" (für $0 \leq x \leq 1$) ist $p_2(x) \leq p_1(x)$.
Gilt so etwas auch für die Funktionen $A \cdot p_1$ $(0 \leq A \in R)$ im Vergleich mit p_2? Ja: zu jedem noch so kleinen $A > 0$ gibt es eine Umgebung von $x = 0$, in der $p_2(x) \leq Ap_1(x)$ gilt. ALSO ist p_2 in der Nähe von $x = 0$ kleiner (wir sagen **spitzer**) als jede der Funktionen Ap_1.
Gilt dies auch für die Funktionen Bp_2 mit noch so großem $B > 0$? Ja: $Bx^2 \leq Ax$ für alle $0 \leq x \leq A/B$. Jede der Funktionen Bp_2 ist spitzer als jede der Funktionen Ap_1.
DEFINITION. Wir sagen: eine Funktion d ist (bei $x = 0$) spitz vom Typ p (p eine Funktion), wenn es ein $0 < C \in R$ und eine Umgebung von $x = 0$ gibt, in der $|d(x)| \leq C \cdot |p(x)|$ gilt [$d(x) = O(p(x))$, besser $d \in O(p)$, mit dem Landauschen Symbol [2, S. 114]].

Beispiel. $f(x) = 2x + 3x^2 + x^3$ [$= x(x+1)(x+2)$] wird
mit $g_0(x) = 3x$, mit $g_1(x) = 2x$ und
mit $g_2(x) = 2x + 3x^2$ verglichen.
Die Differenzfunktionen sind $d_i = f - g_i = ..$
spitz vom Typ ... Aber d_0 ist **nicht** spitz vom Typ p_2,
und d_1 ist nicht spitz vom Typ p_3.

Wir sagen: f und g berühren sich bei $x = 0$ von der Ordnung i $(i = 1, 2, ..)$, wenn $f - g$ spitz vom Typ p_i ist. Für $i \geq 2$ berühren sie sich im anschaulichen Sinne. Nach obiger Diskussion ist die Berührung desto inniger, je größer i ist. [Schnittmultiplizität algebraischer Kurven [1].]

Ergänzungen. Wer ist spitzer, p_1 oder $p_{1/2}$? Wie stumpf ist p_{-1}?

Problem. Bestimme alle Polynomfunktionen, die eine gegebene Funktion f bei $x = 0$ von vorgebener Ordnung i berühren! Zunächst sei f eine **Polynom**funktion.

Durchführung. $i = 1$: g berührt f von der Ordnung 1 genau dann, wenn $g(0) = f(0)$

ist. (Beweis selbst.)
$i = 2$: g berührt f sogar von der Ordnung 2 genau dann, wenn $|f(x) - g(x)| \leq C\,|x^2|$ erzielt wird. In diesem Fall: $(f-g)(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + .. + c_rx^r$ hat $c_0 = c_1 = 0$ – und umgekehrt. f und g stimmen also im absoluten und linearen Teil überein.
DEFINITION. Für $f(x) = f_0 + f_1x + .. + f_nx^n$ heißt $t(x) = f_0 + f_1x$ die **Tangentenfunktion** an f bei $x = 0$.

Berechnung der Tangentenfunktion einer Polynomfunktion an beliegiger (fester) Stelle x.
Betrachte f in einer Umgebung von x, also bei $x + h$ für kleine h. Die neue Variable h macht aus f eine horizontal verschobene Funktion $F(h) = f(x + h)$, die bei $h = 0$ – wie oben – zu studieren ist. Für eine Polynomfunktion f berechnet DERIVE die Funktion F in der Form

$$F(h) = F_0 + F_1h + F_2h^2 + .. + F_nh^n,$$

wobei mit x **symbolisch** gerechnet wird. Die Koeffizienten $F_0 = F(0)$, F_1, ... sind Polynome in x, deren Koeffizienten sich aus den Koeffizienten f_0, f_1, ... des Polynoms f ergeben; auch diese f_i können als DERIVE-Variable behandelt werden. Das Beispiel $n = 3$, also $f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3$, ergibt (auch per Hand)

$$F(h) = f(x + h) = f(x) + (f_1 + 2f_2x + 3f_3x^2)h + (f_2 + 3f_3x)h^2 + f_3h^3.$$

Die Tangentenfunktion für f zur Stelle x lautet (also) als Funktion von h

$$t(x, h) = f(x) + (f_1 + 2f_2x + 3f_3x^2)h.$$

Die Steigung der Tangente zur Stelle x ist

$$f_1 + 2f_2x + 3f_3x^2 =: F_1(x).$$

Der nächste Term $F_2(x) = f_2 + 3f_3x$ sollte genauso interessant sein, da

$$t_2(x, h) = f(x) + F_1(x)h + F_2(x)h^2$$

die Funktion f an der Stelle x von der Ordnung 3 berührt. Die Funktion t_2 (als Funktion von h) heißt das TAYLOR-Polynom vom Grad 2 zu f an der Stelle x. Bei festem x ist die Differenz $r(x, h)$ in $f(x+h) = t_2(x, h)+r(x, h)$ bei $h = 0$ spitz von der Ordnung 3.

Neues Problem. Wie hängen die Funktionen F_i (in x) miteinander und mit $f'(x) := F_1(x)$ zusammen? Man „erkennt" (**Experimente**)

$$F_1(x) = f'(x),$$

$$F_2(x) = \frac{1}{2}F_1'(x) = \frac{1}{2}f''(x),$$

$$F_3(x) = \tfrac{1}{3}F_2'(x) = \tfrac{1}{6}f'''(x), \text{ usw.}$$

Verallgemeinerung. Wie definiert man das (?) TAYLOR-Polynom für eine Funktion, die **keine** Polynomfunktion ist?
Wenn es gelingt, die 1. Ableitung $f'(x)$ allgemein zu definieren (und zu berechnen), so

kann man die vorstehenden Formeln als **Definition** für $F_i(x)$ lesen (falls die Funktion f hinreichend oft differenzierbar ist) und dann

$$t_k(x,h) = f(x) + F_1(x)h + .. + F_k(x)h^k$$

als Funktion von h das TAYLOR-Polynom vom Grad k für f zur Stelle x nennen. Es bleibt dann zu untersuchen, unter welchen hinreichenden Voraussetzungen an f sich $f(x+h)$ und $t_k(x,h)$ bei $h=0$ von der Ordnung $k+1$ berühren.

Einführung der 1. Ableitung.
DEFINITION. Für eine reelle Funktion f heißt die Zahl $F(x)$ eine (?) 1. Ableitung von f zur Stelle x, wenn sich $f(x+h)$ und $f(x)+F(x)h$ als Funktionen von h bei $h=0$ von der Ordnung 2 berühren.
EINDEUTIGKEIT. Aus

$$|f(x+h) - f(x) - F(x)h| \leq A\,|h|^2 \text{ und}$$
$$|f(x+h) - f(x) - G(x)h| \leq B\,|h|^2$$

in einer Umgebung von $h=0$ folgt mit

$$|F(x) - G(x)| \cdot |h| \leq (A+B)\,|h|^2\,,$$

daß $F(x) = G(x)$ ist. - Eindeutigkeit der TAYLOR-Polynome: selbst.
EXISTENZ. Sie ist für jeden Funktionstyp getrennt unter Benutzung der vorstehenden Definition zu prüfen und gegebenenfalls die 1. Ableitung zu ermitteln.

Warnung. Unsere Definition ist schärfer als die übliche (kommt aber ohne Grenzwerte aus): bei uns ist die Zahl $F(x)$ die Ableitung von f an der Stelle x, wenn

$$f(x+h) = f(x) + F(x)h + O(h^2)$$

für $h \to 0$ gilt; sonst fordert man nur

$$f(x+h) = f(x) + F(x)h + o(h)$$

für $h \to 0$. Hier bezeichnet [2, S. 114] $o(h)$ eine Funktion $d(h)$, für die es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung von $h=0$ gibt, in der $|d(h)| \leq \varepsilon \cdot h$ gilt ($d(h)/h \to 0$ für $h \to 0$). Man zeigt schnell, daß $O(h^2)$-Funktionen erst recht $o(h)$-Funktionen sind und daß die Umkehrung nicht gilt (etwa $d(h) = h\,|h|^{1/2}$).

Bemerkung. Im obigen Text habe ich meist zwischen Funktion f und Funktionswert $f(x)$ unterschieden; ich bevorzuge die Schreibweise

$$f = (x \mapsto f(x) \text{ für } x \in D)\colon D \longrightarrow W.$$

DERIVE legt jedoch die Sprechweise

„die Funktion $f(x)$“

nahe. Soll man Programmeigenheiten in die mathematische Sprache übernehmen??

Referenzen

1. G. Fischer, *Ebene algebraische Kurven*, Vieweg, Aufbaukurs Mathematik 67, 1994. HB: Bb1957.
2. H. Werner, *Praktische Mathematik I, Methoden der linearen Algebra*, Springer–Verlag, Hochschultext, ^{3}1982. HB: Bb1233-1+3 LB, Bü1372¬Aufsicht LS.