Geometrie lernen und lehren
Ziele und Formen

Sebastian Thomas

15.10.2004

Die Veranstaltung „Geometrie lernen und lehren“ ist eine fachdidaktische Veranstaltung für Lehramtskandidaten im Fach Mathematik. In ihr sollen die Studierenden lernen, zum einen den Inhalt der Geometrie zu verstehen und andererseits, wie sich dieser erarbeiten und weitergeben lässt, im Hinblick auf den späteren Beruf als Lehrer.

Vom inhaltlichen Aspekt her geht es dabei nicht nur um die Geometrie, wie sie in der Schule gelehrt wird, sondern etwas weiter auch um die Geometrie als ein Teilgebiet der Mathematik und deren globalaxiomatischen Aufbau, wie er an der Hochschule üblich ist. Die konkreten inhaltlichen Ziele für die Schulgeometrie finden sich bei G. Holland, *Geometrie in der Sekundarstufe*. Wir wollen uns hier jedoch zunächst fragen, was eigentlich Mathematik im Allgemeinen und Geometrie im Speziellen ist: Was macht das mathematische Handeln aus? Zunächst ist die Mathematik und insbesondere die Geometrie von Problemen des alltäglichen Lebens motiviert: Es geht etwa darum, Flächeninhalte und Volumina von bestimmten Körpern zu berechnen. Hierzu bedient sich der Mathematiker eines (mathematischen) Modells. Er abstrahiert von den alltäglichen Problemen auf die Strukturen und Muster, welche dahinter stecken (im Falle der Berechnung eines Grundstücks etwa auf dessen Form, z.B. ein Rechteck) und stellt in seiner abstrakten Theorie allgemeine Sätze und Aussagen über diese idealisierten mathematischen Objekte auf. Diese dienen danach im Allgemeinen nicht nur der Interpretationen des motivierenden Problems, sondern lassen sich auch auf andere Probleme anwenden. Im Idealfall wirft die Theorie auch neue interessante Fragen auf und löst Probleme, die vorher gar nicht im Fokus der Betrachtung standen. Durch diesen iterativen Prozess entwickelt sich die Mathematik ständig weiter.

Um (insbesondere in der Schule) zu verstehen, wie die mathematische Theorie entsteht, ist es wichtig, sich die Basis der Argumentation bei der Theorieentwicklung vor Augen zu führen. Wir unterscheiden hierbei vier Diskursebenen, welche die semantischen, d.h. inhaltlichen Aspekte vergegenwärtigen sollen: In der 1. Diskursebene argumentieren wir an Hand konkreter physikalischer Objekte unseres Anschauungsraums, so wie es Kinder in der Grundschule erlernen: Sie rechnen etwa mit Äpfeln oder lernen geometrische Aspekte an Hand konkreter, greifbarer Figuren. Von diesen materiellen Objekten idealisiert man in der 2. Diskursebene - aus drei Äpfeln wird die Zahl 3, aus einer Tischkante eine Gerade und aus einer Tafel ein Rechteck. Dabei behalten die idealisierten Objekte jedoch ihren konkreten Inhalt. Dieser Schritt ist für Kinder in der Grundschule sehr entscheidend und zudem ein langwieriger Prozess: Wenn sie mit Zahlen rechnen, gehen sie in Gedanken immer noch den Umweg über die 1. Diskursebene und stellen sich dabei physikalische Objekte vor bzw. sie benutzen ihre Finger zum Rechnen. Auf der 3. Diskursebene schließlich argumentiert man nur noch über die idealisierten Objekte und versucht allgemeine Eigenschaften dieser zu studieren. Teilweise finden die mathematischen Objekte auch keine Entsprechung im Anschauungsraum mehr. So ist etwa die Einführung der negativen Zahlen in der späten gymnasialen Unterstufe ein gutes Beispiel: Während sich die konkreten Zahlen noch an Hand von Schulden auf der Bank oder negativen Temperaturen auf einem Thermometer verdeutlichen lassen, können wir an Hand von konkreten alltäglichen Beispielen nicht erklären, wieso etwa $(-3) \cdot (-2) = 6$ ist. Dabei rechnet man mit diesen Zahlen genau deswegen auf diese Weise, damit die von den bekannten natürlichen Zahlen herrührenden Gesetze (wie etwa Assoziativität, Kommutativität, etc.) auch im größeren Bereich der ganzen Zahlen erfüllt sind. Dass man die idealisierten Objekte der 3. Diskursebene zum Entwickeln von allgemeinen mathematischen Sachverhalten benutzt, entspricht einem lokalen Ordnen der Begrifflichkeiten, man axiomatisiert sozusagen im Kleinen. Auf der 4. Diskursebene, welche wir auch die axiomatische Kursebene nennen, wird dieser Prozess weiter ausgedehnt: Man geht von so wenigen Aussagen (den Axiomen) wie möglich aus und leitet aus diesen eine mathematische Theorie ab, die mathematischen Objekte werden global geordnet. So ist es etwa ein Ziel dieser Veranstaltung, eine globalaxiomatische Theorie für die Geometrie zu entwickeln. (Wir werden dabei zum einen nach der Methode - synthetische bzw. analytische Geometrie - und zum anderen nach den entwickelten Axiomen - affine bzw. projektive Geometrie - unterscheiden und uns hauptsächlich auf die Geometrie der Ebene

konzentrieren.) Zwischen den Theorien in der Mathematik zeigen sich oftmals auch Verbindungen, so dass sich Sätze im Gesamtbild entwickeln lassen, welche nicht mehr eindeutig einer mathematischen Theorie zugewiesen werden können (etwa der Fundamentalsatz der Algebra). Die gesamte Mathematik fußt dabei auf wenigen Axiomen, welche ein wahnsinniges Ausmaß an Folgerungen haben. Zur Präzisierung seiner Aussagen bedient sich der Mathematiker der Sprache der Mengenlehre, Argumentationsbasis ist die mathematische Logik (meistens die sogenannte „Prädikatenlogik erster Stufe“).
Neben diesen vier Diskursebenen, welchen den semantischen Aspekt der Argumentation betonen, gibt es noch eine weitere Diskursebene, welche den formalen syntaktischen Aspekt beschreibt, die sogenannte symbolische Diskursebene: Auf diese trifft man etwa beim symbolischen Rechnen (nach gewissen Regeln), entweder per Hand oder auch das Rechnen eines Computeralgebrasystems (CAS). Auch die Formalismen der mathematischen Logik (mit ihren stenographischen Symbolen wie $\forall$ oder $\rightarrow$) zählen zu dieser Ebene.
Kommen wir nun zu den methodischen Zielen der Veranstaltung: Oberstes Ziel des gesamten Lehramtssudiums sollte sicherlich sein, zu lernen, wie man das auf der Hochschule ermittelte Wissen seinen Schülern vermitteln kann. Hierzu sollen die fachdidaktischen Veranstaltungen den Studenten Techniken an die Hand legen, sie sollen Arbeitsweisen kennenlernen und erlernen und zum selbständigen Arbeiten hingeführt werden. Um effizient Mathematik betreiben zu können, treten dabei immer wieder dieselben elementaren Schritte auf: Zunächst hat man gewisse Fragen, Probleme, etc., welche das Arbeiten erst motivieren - ohne Fragen keine Antworten. Dies sollte auch den Schülern klar gemacht werden: Wenn sie nicht verstehen, warum der Lehrer an der Tafel genau das macht, was er tut, werden sie es um so schwerer haben, den Stoff zu verstehen. Als nächstes geht es ans Planen, man überlegt sich Strategien, wie sich das Problem lösen lässt und überwacht es, damit man nicht die Übersicht verliert. Zu guter Letzt beginnt man mit der Lösung des Problems: Hierbei ist der Aspekt des Schreibens sehr wichtig, wobei dies eigentlich zu eng gefasst ist - man schreibt, skizziert, liest, probiert, etc. bis man (im Idealfall) die Lösung des Problems gefunden hat. Dabei geht man zunächst auf einem Schmierzettel vor, das Ergebnis (oder auch nur ein Teilergebnis) wird anschließend in Form eines Dokuments aufbewahrt. Dies alles sind elementare mathematische Fähigkeiten, welche die Schüler im Kleinen und die Studenten im Großen im Laufe des Mathematikunterrichts immer wieder erfahren und auch selbst durchführen sollten, um sie zum selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten zu erziehen. Komplexere mathematische Tätigkeiten sind etwa das Entdecken mathematischer Zusammenhänge, Formalisieren, Definieren, Beweisen, Axiomatisieren, Algorithmisieren, Problemlösen und Mathematisieren (z.B. Erstellen eines mathematischen Modells) [1].
Aus diesen Zielen ergibt sich auch die Form des Mathematikunterrichts in der Schule und damit auch die Form der Veranstaltung „Geometrie lernen und lehren“: Die Schüler sollen dazu angehalten werden, selbständig wissenschaftlich zu arbeiten, so wie es oben beschrieben wurde. Dazu bedienen sie und der Lehrende sich gewisser Hilfsmittel, wie etwa Papier und Bleistift, Zirkel, Lineal, Taschenrechner, Computeralgebrasystem und im Geometrieunterricht speziell eines sogenannten dynamischen Geometriesystems (DGS) wie etwa „Geonext“, welches auch in dieser Veranstaltung seine Verwendung findet.

Ziele		**Formen**
Inhaltliche Ziele	Prozessziele	
Schulgeometrie axiomatischer Aufbau	math. Arbeiten, d.h. math. Denken und Handeln math. Denken: vier Diskursebenen math. Handeln: Fragen, Planen, Schreiben	selbständiges Arbeiten Hilfsmittel: TR, CAS, DGS

Tabelle 1: Ziele und Formen des Mathematikunterrichts

Ziele	**Formen**
Inhalts- und Prozessziele selbst erreichen logischen Aufbau überschauen / einordnen können Prozessziele kennen Methoden zur Zielerreichung reflektieren ein Stoffgebiet auf umsetzbare Prozessziele analysieren	selbständiges math. Arbeiten sich der Ziele bewusst werden Aufsätze schreiben Methoden diskutieren und erleben Dokumente austauschen in Fachzeitschriften lesen

Tabelle 2: Ziele und Formen der Veranstaltung

[1] nach Eberhard Endres, Heidelberg