Die Kollineationsgruppe und die affine Gruppe

Sebastian Thomas

11.01.2005

Definition 1. Es sei $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \|, \mathrm{I})$ ein affiner Raum im Sinne der synthetischen affinen Geometrie. Eine Kollineation κ: $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ heißt *affin*, falls es eine Folge $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ von Parallelprojektionen zwischen den Geraden des Raumes gibt, so dass

$$(ABC)\pi_1 \ldots \pi_n = (A\kappa B\kappa C\kappa) \text{ für alle } A, B, C \in \mathcal{P} \text{ mit } C \,\mathrm{I}\, AB.$$

Wir schreiben dann $\mathrm{GTV}(A, B, C) = \mathrm{GTV}(A\kappa, B\kappa, C\kappa)$ und sagen, dass das geometrische Teilverhältnis unter κ erhalten bleibt.

Unser Ziel ist es nun, die Gruppe $\mathrm{Aff}(\mathcal{P})$ aller affinen Abbildungen eines affinen Raumes $\mathcal{P}$ zu studieren. Hierzu gehen wir zunächst etwas allgemeiner vor und studieren die Gruppen $\mathrm{Bikoll}(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ aller Bikollineationen zwischen zwei beliebigen affinen Räumen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}'$.
Wir machen uns das Leben leicht und wechseln in die analytische Geometrie. Es seien also im Folgenden $(\mathcal{P}, V, *)$ und $(\mathcal{P}', V', *')$ affine Räume im Sinne der analytischen Geometrie; hierbei seien V und V' Vektorräume von Dimension $n \geq 2$ über einem beliebigen Schiefkörper K. Ferner sei eine beliebige bikollineare Abbildung $\pi \in \mathrm{Bikoll}(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ gegeben. Um unsere Betrachtungen über den zu $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}'$ gehörigen Vektorräumen führen zu können, wählen wir zwei Ursprünge $U \in \mathcal{P}$ und $U' \in \mathcal{P}'$ und betrachten die Bijektion $\nu_U : \mathcal{P} \to V$, welche jedem Punkt $P \in \mathcal{P}$ den beschreibenden Vektor $v \in V$ mit $P = U * v$ zuordnet. Analog sei $\nu_{U'} : \mathcal{P}' \to V'$ definiert. Statt π können wir nun die zugehörige verpflanzte Abbildung $\pi' := \nu_U^{-1}\pi\nu_{U'} : V \to V'$ betrachten.

Schritt 1. Es sei τ: $V' \to V'$ die Translation mit $U'\tau = U\pi$. Dann folgt $U' = U\pi\tau^{-1}$, das heißt $\kappa := \pi\tau^{-1} \in \mathrm{Bikoll}(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ bildet den gewählten Ursprung $U \in \mathcal{P}$ auf den anderen gewählten Ursprung $U' \in \mathcal{P}'$ ab. Mit

$$\mathrm{Bikoll}(\mathcal{P}, \mathcal{P}')_{U \mapsto U'} := \{\kappa \in \mathrm{Bikoll}(\mathcal{P}, \mathcal{P}') \mid U\kappa = U'\}$$

folgt

$$\mathrm{Bikoll}(\mathcal{P}, \mathcal{P}') = \mathrm{Bikoll}(\mathcal{P}, \mathcal{P}')_{U \mapsto U'} \cdot \mathrm{T}(\mathcal{P}'),$$

wobei $\mathrm{T}(\mathcal{P}')$ die Gruppe aller Translationen auf $\mathcal{P}'$ sei.

Schritt 2. Wir beschränken uns im Folgenden darauf, die Abbildung $\kappa \in \mathrm{Bikoll}(\mathcal{P}, \mathcal{P}')_{U \mapsto U'}$ bzw. deren zugehörige verpflanzte Abbildung $\kappa' := \nu_U^{-1}\kappa\nu_{U'} : V \to V'$ zu studieren. Offensichtlich gilt $0\kappa' = 0$. Nun gilt diese Bedingung für alle linearen Abbildungen, wir *versuchen* deshalb im Folgenden zu zeigen, dass κ' linear ist.
Zunächst zur Additivität: Hierzu seien beliebige Vektoren $v, w \in V$ gegeben. Wir nehmen als erstes an, dass (v, w) linear unabhängig ist. Es sei $P := U' * v$ und $Q := U' * w$. Da unter κ Geraden auf Geraden gehen und parallele Geraden auf parallele Geraden, gibt es einen vierten Parallelogrammpunkt R zu den drei Punkten U', P und Q. Dies bedeutet aber gerade $(v + w)\kappa' = v\kappa' + w\kappa'$. Als nächstes sei hingegen (v, w) linear abhängig, das heißt es gibt ein $\lambda \in K \setminus \{0\}$ mit $w = \lambda v$. Da $n \geq 2$ ist, können wir ein $u \in V$ wählen, so dass (v, u) linear unabhängig ist. Es folgt $v + w = (v + u) + (-u + w)$, das heißt $(v + u, -u + w)$ sind genau dann unabhängig, falls $\lambda \neq -1$ ist. In diesem Fall ergibt sich

$$(v + w)\kappa' = ((v + u) + (-u + w))\kappa' = (v + u)\kappa' + (-u + w)\kappa' = (v\kappa' + u\kappa') + ((-u)\kappa' + w\kappa').$$

Wir zeigen nun $(-v)\kappa' = -(v\kappa')$, dies beweist den obigen Fall sowie den Fall $\lambda = -1$. Hierzu sei ein $u \in V$ gegeben, so dass (v, u) linear unabhängig wirkt. Dann folgt

$$u\kappa' = ((-v) + (v+u))\kappa' = (-v)\kappa' + (v+u)\kappa' = (-v)\kappa' + v\kappa' + u\kappa' \text{ bzw. } (-v)\kappa' = -(v\kappa').$$

Schritt 3. Als nächstes wollen wir zeigen, dass κ' linear ist, das heißt $(\lambda v)\kappa' = \lambda(v\kappa')$ für alle $\lambda \in K$ und alle $v \in V$. Da κ eine Bikollineation ist, werden Geraden auf Geraden abgebildet, es gilt also

$$(\lambda v)\kappa' = \mu\kappa' \text{ für ein } \mu \in K.$$

Dies definiert eine Abbildung $\mu := ((v, \lambda) \mapsto \mu_{v,\lambda})\colon V \times K \to K$, welche wir im Folgenden studieren wollen.

Schritt 4. Für alle $v, w \in V \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned}\mu_{v+w,\lambda}(v\kappa') + \mu_{v+w,\lambda}(w\kappa') = \mu_{v+w,\lambda}(v\kappa' + w\kappa') = \mu_{v+w,\lambda}((v+w)\kappa') = (\lambda(v+w))\kappa' = (\lambda v + \lambda w)\kappa' \\ = (\lambda v)\kappa' + (\lambda w)\kappa' = \mu_{v,\lambda}(v\kappa') + \mu_{w,\lambda}(w\kappa').\end{aligned}$$

Ist (v, w) linear unabhängig, so auch $(v\kappa', w\kappa')$, denn κ ist eine Bikollineation. Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $\mu_{v,\lambda} = \mu_{v+w,\lambda} = \mu_{w,\lambda}$. Ist hingegen (v, w) linear abhängig, so können wir ein $u \in V$ wählen, so dass (v, u) bzw. (w, u) linear unabhängig wird und es folgt auch in diesem Fall $\mu_{v,\lambda} = \mu_{u,\lambda} = \mu_{w,\lambda}$. Es gilt also

$$\mu_{v,\lambda} = \mu_{w,\lambda} \text{ für alle } v, w \in V,$$

das heißt $\mu_{v,\lambda}$ ist unabhängig von $v \in V$. Im Folgenden betrachten wir somit die Abbildung
$m := (\lambda \mapsto \mu_{v,\lambda})\colon K \to K$ für ein beliebiges $v \in V \setminus \{0\}$.

Schritt 5. Um zu zeigen, dass κ' linear ist, müssen wir nachweisen, dass $m = \mathrm{id}$ ist. Hierzu zeigen wir zunächst, dass $m \in \mathrm{Aut}(K)$ ist: Für beliebige λ, μ, $v \in V \setminus \{0\}$ gilt

$$(\lambda+\mu)^m(v\kappa') = ((\lambda+\mu)v)\kappa' = (\lambda v + \mu v)\kappa' = (\lambda v)\kappa' + (\mu v)\kappa' = \lambda^m(v\kappa') + \mu^m(v\kappa') = (\lambda^m + \mu^m)(v\kappa')$$

und

$$(\lambda\mu)^m(v\kappa') = ((\lambda\mu)v)\kappa' = (\lambda(\mu v))\kappa' = \lambda^m((\mu v)\kappa') = \lambda^m(\mu^m(v\kappa')) = (\lambda^m\mu^m)(v\kappa'),$$

also

$$(\lambda+\mu)^m = \lambda^m + \mu^m \text{ und } (\lambda\mu)^m = \lambda^m\mu^m.$$

Also ist $m \in \mathrm{Aut}(K)$ und damit κ' zumindest eine semilineare Abbildung.

Definition 2. Es seien K ein Schiefkörper und V, V' Vektorräume über K. Eine Abbildung $\varphi : V \to V'$ heißt *semilinear*, wenn es einen Automorphismus $\alpha \in \mathrm{Aut}(K)$ gibt mit

$$(v+w)\varphi = v\varphi + w\varphi \text{ und } (\lambda v)\varphi = \lambda^\alpha(v\varphi) \text{ für alle } v, w \in V, \lambda \in K.$$

Bemerkung 1. Ist φ eine α-semilineare und ψ eine β-semilineare Abbildung, so ist $\varphi\psi$ eine $\alpha\beta$-semilineare Abbildung; ist weiter φ bijektiv, so ist φ^{-1} eine α^{-1}-semilineare Abbildung. Die semilinearen Abbildungen von V bilden eine Gruppe $\Gamma\mathrm{L}(V)$, welche eine Obergruppe von $\mathrm{GL}(V)$ ist.

Bemerkung 2. Eine α-lineare Abbildung φ ist durch ihre Wirkung auf einer Basis von V festgelegt.

Beweis. Es sei $\mathcal{B}$ eine beliebige Basis von V. Dann gibt es für alle $v \in V$ eine eindeutige Darstellung $v = \sum_{b\in\mathcal{B}} \lambda_b b$ und es gilt

$$v\varphi = (\sum_{b\in\mathcal{B}} \lambda_b b)\varphi = \sum_{b\in\mathcal{B}} (\lambda_b b)\varphi = \sum_{b\in\mathcal{B}} \lambda_b^\alpha (b\varphi).$$

$\square$

Beispiel 1. Es sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $V = K^{1\times 2}$ der 2-dimensionale Zeilenraum über K. Es ist $|\operatorname{Aut}(K)| = [K : \mathbb{Q}] = 2$, das heißt, es gibt einen nichttrivialen Automorphismus α von K. Dieser ist gegeben durch $(\sqrt{2})^\alpha = -\sqrt{2}$. Offensichtlich ist die Abbildung $\kappa'\colon V \to V$ mit $(1,0)\kappa' = (1,0)$ und $(0,1)\kappa' = (0,1)$ eine semilineare Abbildung (die nicht linear ist), welche eine Bikollineation κ auf dem zugehörigen affinen Raum $\mathcal{P}$ bewirkt.

Somit war unsere Vermutung, dass alle Bikollineationen als verpflanzte Abbildungen Vektorraumisomorphismen haben, falsch. Insbesondere gilt für einen affinen Raum $\mathcal{P}$:

$$\operatorname{Koll}(\mathcal{P}) = \operatorname{Koll}(\mathcal{P})_{U\mapsto U'} \cdot \mathrm{T}(\mathcal{P}) \text{ mit } \operatorname{Koll}(\mathcal{P})_{U\mapsto U'} \cong \Gamma\mathrm{L}(V).$$

Bemerkung 3. Es gilt sogar

$$\operatorname{Koll}(\mathcal{P}) \cong \Gamma\mathrm{L}(V) \ltimes \mathrm{T}(\mathcal{P}).$$

Bemerkung 4. Es gilt

$$\Gamma\mathrm{L}(V) \cong \mathrm{GL}(V) \rtimes \Gamma\mathrm{L}(V)_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{B}} \text{ mit } \Gamma\mathrm{L}(V)_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{B}} = \{\varphi_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{B},\alpha} \mid \alpha \in \operatorname{Aut}(K)\} \cong \operatorname{Aut}(K),$$

wobei $\varphi_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{B},\alpha}$ die α-semilineare Abbildung mit $\varphi_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{B},\alpha}|_{\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ ist.

Definition 3. Wir definieren das algebraische Teilverhältnis zwischen drei kollinearen Punkten A, B, C eines affinen Raumes $\mathcal{P}$: Es ist $\operatorname{ATV}(A,B,C) = \lambda$, wenn $w = \lambda v$ mit $B = A * v$ und $C = A * w$.

Als Anwendung des Strahlensatzes (und dessen Umkehrung) ergibt sich die folgende Charakterisierung:

Satz 1. Es seien $A, B, C \in \mathcal{P}$ drei kollineare Punkte eines affinen Raumes $\mathcal{P}$ und $\kappa \in \operatorname{Koll}(\mathcal{P})$. Dann ist

$$\operatorname{GTV}(A,B,C) = \operatorname{GTV}(A\kappa, B\kappa, C\kappa)$$

genau dann, wenn

$$\operatorname{ATV}(A,B,C) = \operatorname{ATV}(A\kappa, B\kappa, C\kappa).$$

Wir erhalten als direkte Folgerung:

Satz 2. Für jeden affinen Raum $(\mathcal{P}, V, *)$ gilt

$$\operatorname{Aff}(\mathcal{P}) \cong \mathrm{GL}(V) \cdot \mathrm{T}(V).$$

Beweis. Es sei $\pi \in \operatorname{Aff}(\mathcal{P})$ eine beliebige affine Abbildung. Dann gehört zu π eine eindeutig bestimmte α-semilineare Abbildung $\kappa' \in \Gamma\mathrm{L}(V)$ für ein $\alpha \in \operatorname{Aut}(K)$, das heißt es ist $(\lambda v)\kappa' = \lambda^\alpha (v\kappa')$ für alle $v \in V$, $\lambda \in K$. Da aber π das algebraische Teilverhältnis erhält, folgt $\alpha = \mathrm{id}$. $\square$

Für die Schule ist die Unterscheidung zwischen $\operatorname{Aff}(\mathcal{P})$ und $\operatorname{Koll}(\mathcal{P})$ sowieso hinfällig, denn aus der Algebra wissen wir, dass $\operatorname{Aut}(\mathbb{R}) = 1$ ist. Somit ist jede Kollineation über einen reellen affinen Raum eine affine Abbildung.