File: rahmen04.tex Aachen, 4. Nov. 2004

Die fünf Diskursebenen:
vom inhaltlichen zum formalen mathematischen Denken und zurück

Kurztitel: Die fünf Diskursebenen

Verfasser: Prof. Dr. Ulrich Schoenwaelder, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Lehrstuhl D für Mathematik, Templergraben 55, 52062 Aachen

E-mail: uschoenw@math.rwth-aachen.de

Zusammenfassung: *Warum wird „die Mathematik“ in der Schule oft nicht verstanden? Werden beim Übergang von realen Erfahrungen zur Theorie die Schritte im Prozess der Modellbildung nicht bewusst genug gemacht und deren Sinn nicht explizit reflektiert? Kann oder muss man wissenschaftliches Vorgehen in der Schule verdeutlichen?*

Auf dem Weg vom Beschreiben physischer Gegebenheiten zu einer axiomatisch fundierten mathematischen Theorie kann man vier inhaltliche Argumentationsebenen unterscheiden; daneben tritt in der Mathematik interpretationsfreies Manipulieren von Symbolen. Diese Diskursebenen werden an Beispielen aus der Geometrie (Satz des Pythagoras und Höhenschnittpunktsatz) erläutert. Ein Wechsel der Argumentationsbasis sollte vom Lehrer in Schule und Hochschule bewusst vollzogen

werden.

Mathematik ist für *strenges Begründen* bekannt. Aber was ist die jeweilige Argumentationsbasis im Mathematikunterricht? In §1 stelle ich dazu vier inhaltliche Diskursebenen und eine syntaktische vor und erläutere diese in §2 allgemein am Beispiel der (ebenen) Schulgeometrie. Dann schließen sich konkrete Beispiele aus der vektoriellen („analytischen“) Geometrie an: Flächeninhalt von Parallelogrammen (§5), Orthogonalität und Quadrate (§6), Satz des Pythagoras (§7 – §9), Höhenschnittpunktsatz (§10 – §16). Dabei wird besonders beim Übergang zur syntaktischen Diskursebene bewusst gemacht, welche Rechenregeln die Rechnung erlauben. Dies ermöglicht es dann umgekehrt, das Rechenergebnis und eventuell auch formale Zwischenergebnisse inhaltlich anders zu interpretieren als zunächst vorgestellt. Möglicherweise kann durch solche Neuinterpretation einer formalen Rechnung auch der Übergang zur axiomatischen Vorgehensweise des 20. Jahrhunderts in der Hochschule und Schule erleichtert werden.

A. Die fünf Diskursebenen

1. Beschreibung der fünf Ebenen des Diskurses. Der Mensch macht sich so seine Theorien von den Dingen. Oft ist es eine mathematische Theorie. Das fängt an beim Begriff der Zahl, verschiedenen Zahlbereichen, geht über die Idealisierung im Begriff der reellen Zahlen bis zum algebraischen Körperbegriff; oder es geht im Bereich der Geometrie von Stellen und gespannten Seilen im Raum über die Idealisierung zu Punkten und Geraden zu (synthetischen oder analytischen) geometrischen Theorien. Man kann im Laufe der mathematischen Theorienbildung die folgenden *inhaltlichen* und *syntaktischen* [4, S. 33] Typen von Theorien (Diskursebenen) nach der Art ihrer Argumentationsbasis unterscheiden. Dabei trenne ich mehr inhaltsbezogene Theorien (semantischer Aspekt) von interpretationsfreien Kalkülen (syntaktischer Aspekt).

Semantischer Aspekt:

1. Erste Diskursebene: Ebene einer realen Ausgangssituation in der Sprache des Alltags oder

des Sachgebietes.

2. Zweite Diskursebene: Propädeutische Ebene mit abstrakten Begriffen zu realen Situationen und mit rein inhaltlicher Argumentation.

3. Dritte Diskursebene: Ebene des lokalen Schließens mit abstrakten Begriffen zu realen Situationen, aber mit vorwiegend expliziten, aber auch impliziten Regeln für deren Gebrauch.

4. Vierte Diskursebene: Axiomatische Ebene mit (mehreren) Beispielen auf der dritten Ebene.

Syntaktischer Aspekt:

S. Syntaktische Ebene: Ebene der interpretationsfreien, regelhaften Manipulation von Zeichenketten (Termumformungen, Kalküle, Termersetzungssysteme).

Die vier inhaltlichen Diskursebenen treten häufig bei der Entwicklung eines einzigen Sachgebietes (etwa der Geometrie oder der Arithmetik/Algebra) auf. Für die (voraxiomatische) Geometrie nimmt Heinz Griesel [10] eine ähnliche Einteilung vor. Auch bei Günter Ewald [3] werden Stufen der Argumentation in der Geometrie unterschieden, die sehr gut meiner Einteilung entsprechen. „Die intuitiv-geometrische Methode muß im Geometrieunterricht ihren festen Platz behalten oder wiedergewinnen“ [3, 1. These]; dies entspricht meiner 2. Diskursebene. „In allen Schulstufen sollte das Verfahren der relativen Exaktheit deutlich werden: Dieses besteht darin, beim Beweis eines mathematischen, insbesondere geometrischen Satzes genau die verwendeten Voraussetzungen herauszuarbeiten, gleichgültig, ob diese schon vorher bewiesene Sätze oder durch Beobachtung nahegelegte Annahmen sind“ [3, 3. These]; dies entspricht meiner 3. Diskursebene. „Die explizite Einführung von Axiomen sollte erst in der Oberstufe geschehen, und zwar dort, wo auch Probleme der Logik, insbesondere der Widerspruchsfreiheit von Axiomen, diskutiert werden können“ [3, 2. These]; dies entspricht meiner 4. Diskursebene.

Bezüglich der syntaktischen Diskursebene findet man bei Ewald [3, §7] einen Hinweis auf René Thom: „Hinsichtlich der Exaktheit trifft er die folgende bemerkenswerte Feststellung: ‚... Man gelangt zu absoluter Strenge nur durch das Ausklammern von Bedeutung.‘... Thom hebt den

Bedeutungswert hervor, den eine anschauliche Figur gegenüber den algebraischen Objekten besitzt; letztere nennt er ‚semantisch arm'." Teile der Sprache der Theorien der zweiten bis vierten Diskursebene können so weit durch Zeichenketten (Formeln) symbolisiert und mit Regeln zu deren Manipulation versehen sein, dass man von der Bedeutung der Symbole absehen kann [16]. Diese Situation der rein syntaktischen Argumentation liegt beim numerischen Rechnen und beim algebraischen symbolischen Rechnen vor, wie es schon immer beim Einmaleins und bei Termumformungen und heutzutage auf Taschenrechnern mit numerischen und symbolischen Funktionen (Computeralgebrasystemem) üblich ist. Bei jedem Computereinsatz wird ein solcher Kalkül benutzt. Die Symbole können danach (auf einer inhaltlichen Diskursebene) wie intendiert oder auch anders interpretiert werden. „Die *Trennung* und *Verselbständigung* des Formalen ist eine charakteristische Methode der Mathematik und eine ihrer Stärken" [4, S. 47]. Die syntaktische Diskursebene kann von der zweiten, dritten und vierten inhaltlichen Diskursebene aus erreicht werden.

In den folgenden Beispielen werde ich den Wechsel zwischen Diskursebenen hervorheben. Es geht mir darum, besonders im Rahmen der Mathematiklehrerausbildung schlagwortartig bewusst zu machen, dass der Argumentation auf den verschiedenen Ebenen (desselben Sachgebietes) unterschiedliche Annahmen zugrunde liegen. Z. B. lässt sich die Formel $(-2) * (-3) = 6$ durch Regelmäßigkeiten in drei Quadranten der Multiplikationstafel für Paare ganzer Zahlen motivieren und durch das Permanenzprinzip für Rechenregeln (Axiome) auf der vierten Diskursebene begründen, aber nicht auf der zweiten Diskursebene gegenständlich realisieren.

Für den Lernenden kommen neben diesen Wechseln andere Schwierigkeiten hinzu. Welche Stufen in der *Entwicklung* des mathematisch-logischen Denkens von Lernenden durchlaufen werden müssen, ist eine weitergehende kognitionspsychologische Frage. Zu diesem „development of the levels of thinking" (Niveaus der Einsicht in [5]) hat Pierre M. van Hiele einen grundlegenden Beitrag geleistet [25, insbes. S. 173] und am Beispiel der *Geometrie* verschiedene Phasen während der Periode vor Erreichen des nächsthöheren Levels, einer Metatheorie des vorherigen Niveaus, ausgemacht. Hans Freudenthal [6, S. 220 und S. 278] setzt fünf Phasen bei der Entwicklung des *Zahlbegriffs* zu fünf Stufen im Lernprozess in Beziehung. Weitere Hinweise auf Lernstufen findet man in [6, S. 116 ff], [28, S. 7], [27, S. 75], [12], [17, S. 77-78].

Ich sehe mich hier nicht in der Lage, unterrichtliche Vorschläge zu den folgenden geometrischen Beispielen für Diskursebenen zu machen. Auch eignet sich der dargestellte Stoff an manchen Stellen eher für Veranstaltungen der Mathematiklehrerausbildung als für Schüler; aber dort kann er demonstrieren, wie das Streben des Mathematikers nach größtmöglicher Allgemeinheit auf dem Weg über die syntaktische Ebene selbst bei klassischen Themen wie dem Satz des Pythagoras und dem Höhenschnittpunktsatz zu eventuell neuen Ergebnissen führen kann.

2. Die fünf Diskursebenen am Beispiel geometrischer Theorien. Theoriebildung (und insbesondere Modellbildung) kann von Objekten und Erfahrungen ausgehen, die in der Alltagssprache beschrieben werden, etwa Stellen im uns umgebenden Raum; gespannte Seile, gerade Kanten und Lichtstrahlen weisen Gemeinsamkeiten auf. Dies ist die *erste* Ebene des Diskurses. Idealisierung dieser Begriffe zu „Punkt“, „Gerade“, „parallelen“ Geraden, Punkten „auf“ einer Geraden und die Beschreibung gewisser Beziehungen zwischen den idealisierten Objekten führt zu einer Theorie der *zweiten* Diskursebene. Ihre Aussagen werden intuitiv erfasst und eventuell durch Hinweis auf die „Theorie“ der ersten Diskursebene begründet. Erst auf der *dritten* Ebene des Diskurses werden solche Beziehungen ausformuliert, also (zunächst nur teilweise) explizit gemacht. Man sammelt Aussagen über den „Anschauungsraum“. Und man fängt an, mit ihnen lokal zu argumentieren (lokales Ordnen im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I): welche logischen Abhängigkeiten bestehen zwischen den Begriffen und Sachverhalten? Dabei bleibt aber immer die inhaltliche Bindung der Begriffe an die erste Diskursebene gewahrt: es geht weiterhin um Stellen im Raum oder auf dem Blatt Papier. Wir befinden uns hier auf der Diskursebene der Elemente des Euklid [11], auch wenn er die Geometrie globaler aufbaut, als es in der Sekundarstufe I der Schule noch möglich ist (für ein System von expliziten (und impliziten) Grundsätzen für die ebene Geometrie siehe z. B. [8]). (Vgl. auch [1, S. 108, 111].)

Nach dieser synthetischen teil-axiomatischen Behandlung der Geometrie wird in der Sekundarstufe II im Rahmen der Analytischen Geometrie eine neue Beschreibung des Anschauungsraumes auf der dritten Diskursebene vorgenommen, indem die Punkte durch Positionspfeile bzgl. eines festen Ursprungspunktes ersetzt werden: man ändert die Grundbegriffe von Punkt zu Positionspfeil, von Gerade zur vektoriellen Beschreibung von Geraden durch Positionspfeile (noch ohne Koordinaten). Die Addition von Positionspfeilen geschieht über die Parallelogrammkonstruktion[1]; die Multiplikation und Division von Positionspfeilen mit rationalen Zahlen geschieht über die Strahlensatz-Konstruktion[2]. Dass verschiedene ganze Zahlen zu verschiedenen Vielfachen eines Positionspfeils führen, ist eine Eigenschaft des Anschauungsraumes, die erst hier bewusst wird, aber in der Schule nicht expliziert wird. Beim Übergang zu reellen Vielfachen braucht man Eigenschaften der reellen Zahlen explizit. Mit den bisher explizit gemachten Eigenschaften der Begriffe des Anschauungsraumes kann man für die Positionspfeile die Rechenregeln eines $\mathbb{Q}$– bzw. $\mathbb{R}$–Vektorraums nachweisen. Man hat hier zwar die Regeln eines Vektorraums, aber noch nicht den axiomatischen Begriff des Vektorraums der vierten Diskursebene. Vielmehr bleibt man auf der dritten Diskursebene. Deshalb rede ich auch von Positionspfeilen und nicht von (Orts-)Vektoren als Elementen eines Vektorraums (Theorie der vierten Diskursebene).

Da diese Regeln für Positionspfeile formal mit denen für Zahlbereiche übereinstimmen, kann man ohne Schwierigkeiten händige Termumformungen durchführen oder ein Computeralgebrasystem benutzen, um mit Positionspfeilen zu rechnen. Solche Rechnungen finden auf der *syntaktischen* Ebene statt. Das Standardbeispiel ist der Nachweis, dass sich die Seitenhalbierenden eines räumlichen Dreiecks $[A, B, C]$ mit den Positionspfeilen a, b, c in dem Punkt S mit dem Positionspfeil $s := \frac{1}{3}(a + b + c)$ schneiden, dem arithmetischen Mittel der gegebenen Positionspfeile. Dieser Pfeil lässt sich ja in der Form $a + \lambda(\frac{1}{2}(b + c) - a)$ für ein $\lambda \in \mathbb{Q}$ und analog für b und c darstellen. Bei der Termumformung

$$a + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}(b + c) - a) = \frac{1}{3}(a + b + c)$$

können wir getrost vergessen, dass a, b, c Positionspfeile bezeichnen; jeder Schüler und jedes Com-

[1] Im Falle von mit dem Ursprung kollinearen Punkten braucht man eine Hilfsgerade mit Hilfspunkt und zum Beweis der Unabhängigkeit der Summe hiervon den kleinen affinen „Satz“ von Desargues.

[2] Hier braucht man den großen „Satz“ von Desargues.

puteralgebra-System führt die Rechnung aus, ohne an Pfeile zu denken; und diesen syntaktischen Aspekt kann man auch mit Leistungskurs-Schülern diskutieren. Im Gegensatz zur vierten axiomatischen Ebene, die in der Oberstufe des Gymnasiums zwar angestrebt, aber vorher kaum erreichbar ist, tritt die syntaktische Ebene im Unterricht regelmäßig in Erscheinung. Sie sollte hier aber nicht nur zur Lösung eines aktuellen Problems benutzt werden; sie bietet vielmehr durch verschiedene *Interpretationen* der selben Formel die Möglichkeit, die Kraft mathematischer Abstraktionen zu demonstrieren.

Ein einfaches Beispiel hierfür ist die binomische Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Auf der Mittelstufe wird sie durch Zahlen a und b und deren Rechenoperationen interpretiert sowie durch Flächeninhalte bei der Zerlegung eines Quadrates mit Seiten*länge* $a+b$ [4, S. 39]. Im Rahmen der Analytischen Geometrie der Sekundarstufe II können a und b auch Positionspfeile bedeuten (§3), und das Produkt wird als *ein* (positiv definites oder indefinites) Skalarprodukt interpretiert. Die Skalarprodukte können in der Anschauungsebene als orientierte Flächeninhalte gedeutet werden; dies werde ich in §4 ausführen. Je nach Produkt (Wahl einer Basis, die als Orthonormalbasis interpretiert wird: §5) liefert dies physikalisch unterschiedliche Versionen des Satzes von Pythagoras (im Fall $a \cdot b = 0$) (§6) und seiner Verallgemeinerung auf beliebige Dreiecke (§7).

Wie steht es nun in der Analytischen Geometrie mit der vierten axiomatischen Diskursebene? Sicher wird man in der Schule die Positionspfeile auch als Linearkombinationen einer Basis aus Positionspfeilen darstellen und so eine Bijektion zwischen Positionspfeilen und ihren Komponentenspalten [Spaltenmatrizen über $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$] herstellen und erkennen, dass man mit den Spalten genau so rechnet wie mit den zugehörigen Positionspfeilen. Hier scheint die abstrakte Vektorraumtheorie der vierten Diskursebene auf.

In Umkehrung der bisherigen Diskussion werden im fertigen Aufbau an der Universität affine Räume (im Sinne der Analytischen Geometrie) mit Hilfe eines Rechtsvektorraums über einem beliebigen Schiefkörper axiomatisch eingeführt. Das Ziel ist es jetzt nicht mehr nur, theoretische Ergebnisse über den Anschauungsraum abzuleiten, sondern einen Überblick über die Gesamtheit aller *denkbaren* „affinen Räume“ [beliebiger Dimension über beliebigen Schiefkörpern] zu bekommen und dies auch in nichtgeometrischen Situationen zu interpretieren. Analog hierzu studiert man im synthetischen Zugang [auf der vierten Diskursebene] axiomatisch definierte euklidische und nicht-euklidische Räume, eine Vorgehensweise, die erst im 19. Jahrhundert die Beantwortung uralter Fragen [der dritten Diskursebene] über das euklidische Parallelenaxiom ermöglichte [24].

3. Die Bedeutung der Unterscheidung von Diskursebenen. Natürlich muss man bei jedem Prozess von Mathematisierung eines lebensweltlichen Bereiches auf der ersten Diskursebene beginnen und über Idealisierung oder Abstraktion zur zweiten Ebene übergehen. Vermutlich bleiben viele Schüler auf dieser Stufe des Unterrichts in Mathematik und Mathematik benutzenden Fächern stehen; das hypothetische lokale Argumentieren mit an der Realität überprüften Regeln [Annahmen] über die [idealisierten] Objekte des Diskurses der dritten Ebene fällt schon vielen Schülern schwer, besonders wenn diese Vorgehensweise von ihrer Zielsetzung [des logischen lokalen Ordnens] her nicht klar wird. Wenn die Schule zum Sichbilden als *geistiger Verarbeitung der Erfahrung* [14, S. 59] anregen soll, dann kann dies bezüglich der mathematischen Methode gerade durch ein Bewusstmachen des Standortwechsels [13, S. 193] zur dritten oder zur syntaktischen, schließlich auch zur vierten Diskursebene geschehen.

In der Lehrerausbildung für die Sekundarstufe II ist die vierte Diskursebene unverzichtbar. Studierenden wird der schwierige Übergang von der dritten zur vierten Diskursebene im ersten Semester sehr deutlich. Aber auch der Übergang in der umgekehrten Richtung zu den Diskursebenen der Schule sollte ihnen bewusst sein. Hochschullehrer können dies schon mit ersten Semestern reflektieren, die Lineare Algebra bietet sich hierfür an. Auch eine bewusste Trennung der inhaltlichen Diskursebenen 1 bis 4 (zwecks Begriffsbildung) von der syntaktischen Diskursebene (zum Zweck von Rechnungen) würde manche Darstellung der Linearen Algebra und der Analytischen Geometrie und ihrer Anwendungen durchsichtiger machen.

Wozu lernen wir Mathematik? Wozu lehren wir Mathematik?

Mathematikunterricht sollte erlebbar machen, wie mathematische Wissensbildung geschieht, schreibt Lisa Hefendehl-Hebeker [12, S. 79, 92] und gibt dafür einen didaktischen Grund, einen methodischen, einen bildungspolitischen, einen wissenschaftssoziologischen und einen humanitären Grund an. Diese Fragen über das Verhältnis Mensch – Mathematik kann nun jeder Schüler und jeder Lehrer in der Diskussion über die Inhalte *für sich* beantworten [4, S. 31–32]; darin liegt das *Sichbilden* durch Mathematik [14, S. 39]. Die Auseinandersetzungen der Einzelnen mit Inhalten und Methoden der Mathematik (im Unterricht) bestimmen letztendlich das Bild von Mathematik in der Gesellschaft.

B. Grundbegriffe der vektoriellen ebenen Geometrie

4. Positionspfeile. Dass Stellen im physikalischen Raum (erste Diskursebene) zu Punkten des „Anschauungsraumes" idealisiert werden (zweite Diskursebene), ist schon den Schülern der Mittelstufe des Gymnasiums klar. Im selben Sinne werden die idealisierenden Begriffe Gerade, parallel, orthogonal, Quadrat benutzt. Im Rahmen der Analytischen Geometrie der Oberstufe werden nach Wahl eines festen Punktes U als Ursprung die Punkte des Anschauungsraumes durch ihre Positionspfeile mit Ursprung U beschrieben. Die Einführung der Addition von Positionspfeilen (über die Parallelogrammkonstruktion) und der Multiplikation mit rellen Zahlen (über die Strahlensatz-Konstruktion) legt die Aufstellung von Rechenregeln nahe; wir kommen so zur dritten Diskursebene, wo die Menge $\mathbf{P}(U)$ der Positionspfeile mit Ursprung U bezüglich Addition und Skalarmultiplikation die Vektoraum-Rechenregeln erfüllt. Die Vektorrechnung kann so zur Lösung von Problemen der affinen Geometrie beitragen.

Um auf dieser Diskursebene den Satz des Pythagoras formulieren zu können, braucht man noch die Begriffe Flächeninhalt, Orthogonalität, Quadrat der (metrischen) affinen Geometrie. Wir werden sie in §5 und §6 auf der dritten Diskursebene einführen. Der anschließende Beweis des Pythagorassatzes in §7 wird erkennen lassen, dass er nur auf den Regeln der dritten Diskursebene basiert, also auch in anderen als den ursprünglich intendierten physikalischen (erste Diskursebene) oder idealisierten Situationen (Anschauungsebene der zweiten Diskursebene) interpretiert werden kann. Vielleicht noch unbewusst befinden wir uns hier schon auf der axiomatischen Ebene von zweidimensionalen reellen Vektorräumen mit Skalarprodukt (vierte Diskursebene). Der Übergang zur axiomatischen Ebene wird unterstützt durch einen Beweis, der zwar per Hand elementar schon formelhaft abläuft, aber zur Betonung des rein syntaktischen Aspektes auch mit einem Computeralgebrasystem - das natürlich nichts von unseren Interpretationen weiß - nachvollzogen werden kann. Ich möchte diese Schritte jetzt im Einzelnen ausführen.

5. Flächeninhalt ebener Polygone. Wir sind per Anschauung davon überzeugt, dass jedes Dreieck der Anschauungsebene (der zweiten Diskursebene) einen Flächeninhalt hat, der ein wohlbestimmtes Vielfaches eines Einheitsflächeninhalts ist. (Unter der Dreiecksfläche stellen wir uns die inneren Punkte des Dreiecks vor.) Kompliziertere Figuren, die sich in der Ebene aus Dreiecken zusammensetzen, haben dabei als Inhalt die Summe der Inhalte der einzelnen Dreiecke. So hat ein Parallelogramm den doppelten Inhalt eines jeden Dreiecks, das durch Zerschneiden des Parallelogramms längs einer Diagonalen entsteht. Bei Drehungen und Translationen ändert sich der Inhalt nicht. Als Einheitsfläche kann man ein festes Dreieck oder ein festes Parallelogramm wählen.

Da wir es beim Satz des Pythagoras nur mit Flächeninhalten von „Quadraten" zu tun haben werden, wird es uns reichen, den Begriff des Flächeninhalts von Parallelogrammen der Anschauungsebene zu präzisieren, und zwar durch Regeln (auf der dritten Diskursebene), auf die sich unsere Argumentation dann stützen kann (als Argumentationsbasis im Sinne von Günther Malle [19]).

Wie schon in §4 wählen wir in der Anschauungsebene (der zweiten Diskursebene) einen festen Punkt U als Ursprung. Es reichen uns Parallelogramme, deren eine Ecke U ist. Das Parallelogramm ist dann durch zwei weitere Eckpunkte A und B mit Positionspfeilen a und b und den vierten Parallelogrammpunkt mit dem Positionspfeil $a + b$ festgelegt. Ein Parallelogramm mit Ecke U wird also durch ein Paar (a, b) von Positionspfeilen beschrieben. Dabei unterscheiden wir (a, b) von (b, a), reden also genauer von *orientierten* Parallelogrammen mit Ecke U, weil die sehr allgemeine Regel (2), die wir weiter unten für den Flächeninhalt von Parallelogrammen aufstellen werden, dies erfordert.

Wir gehen nun vom anschaulichen Flächeninhaltsbegriff (auf der zweiten Diskursebene) zu Regeln im Umgang mit dem Inhaltsbegriff für Parallelogramme mit Ecke U (auf der dritten Diskursebene) über, indem wir festhalten:

1. Wir wählen eine feste Basis (b_1, b_2) von $\mathbf{P}(U)$. [Das zugehörige Parallelogramm mit Ecke U sei die „Einheitsfläche“ mit dem „Einheitsflächeninhalt“.]

2. Wir haben die Flächeninhaltsfunktion F, die jedem Paar (a, b) von Positionspfeilen den „Flächeninhalt“ $F(a, b)$ des zu (a, b) gehörenden orientierten Parallelogramms mit Ecke U zuordnet. Wir sagen hier nicht, was für ein physikalisches oder mathematisches Objekt $F(a, b)$ sein soll, da es ja den anschaulich *gegebenen* Inhalt bezeichnet (erst bei Übergang zur vierten Diskursebene ist F *irgendeine* solche Funktion), sondern halten nur fest, dass man mit diesen Objekten nach den üblichen Regeln rechnen kann: die Werte $F(a, b)$ liegen in einem Bereich, in dem man addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren kann und zwar unter Anwendung der üblichen Rechenregeln (also in einem rellen Vektorraum). $F(b_1, b_2)$ soll nicht der Nullflächeninhalt sein.

3. Wir stellen fest, dass F die folgenden Regeln erfüllt.

$$F(a+b, b) = F(a, b) \text{ und } F(a, b+a) = F(a, b) \text{ für alle } a, b \in \mathbf{P}(U), \tag{1}$$

$$F(\lambda a, b) = \lambda F(a, b) \text{ und } F(a, \mu b) = \mu F(a, b) \text{ für alle } a, b \in \mathbf{P}(U), \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Die Regel (1) in Nr. 3 entspricht dem Zerlegen in Dreiecke und der entsprechenden Additivität der Inhalte. Die Regel (2) ist für positive λ und μ durch die Anschauung motiviert. Indem wir auch negative λ und μ zulassen, erweitern wir den Inhaltsbegriff zum *orientierten Flächeninhalt.* Eine Regel ohne Ausnahme ist allemal leichter handhabbar.

Damit haben wir einen Begriff „Flächeninhalt für orientierte Parallelogramme mit Ecke U“ auf der dritten Diskursebene auf den Weg gebracht. Es wird sich als Nächstes herausstellen, dass diese

Regeln für F ausreichen, um zu zeigen, dass F weitere wichtige Regeln erfüllt. Wir folgen dabei Emanuel Sperner [23, Vierter Abschnitt].

$$F(a,a) = 0 \cdot F(b_1,b_2) \text{ für alle } a \in \mathbf{P}(U) \tag{3}$$

wobei $F(a,a)$ wie $F(b_1,b_2)$ einen Flächeninhalt bezeichnet, also nach 2. eine Größe, keine Zahl.

Denn $F(a,a) = -F(-a,a) = -F(0,a) = -0 \cdot F(a,a) = 0 \cdot F(b_1,b_2)$ nach (2), (1), (2) und den Regeln für die Zahl 0 im Bereich der F-Werte.

$$F(a,b) = -F(b,a) \text{ für alle } a,b \in \mathbf{P}(U). \tag{4}$$

Denn $F(a,b) = F(a+b,b) = -F(-a-b,b) = -F(-a-b,-a) = -F(a+b,a) = -F(b,a)$ nach (1), (2), (1), (2), (1).

$$F(a+\beta b,b) = F(a,b) \text{ für alle } a,b \in \mathbf{P}(U), \beta \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Denn $\beta F(a,b) = F(a,\beta b) = F(a+\beta b,\beta b) = \beta F(a+\beta b,b)$ nach (2), (1), (2), also $F(a,b) = F(a+\beta b,b)$, falls $\beta \neq 0$ ist; im Fall $\beta = 0$ ist (5) nichts Neues.

$$F(x+x',y) = F(x,y) + F(x',y) \text{ für alle } x,x',y \in \mathbf{P}(U). \tag{6}$$

Hier nehmen wir zunächst an, dass (x,y) eine Basis ist, also x' als $x' = \alpha x + \beta y$ darstellbar ist. Dann ist $F(x+x',y) = F((1+\alpha)x+\beta y,y) = F((1+\alpha)x,y) = (1+\alpha)F(x,y) = F(x,y) + F(\alpha x,y) = F(x,y) + F(\alpha x+\beta y,y) = F(x,y) + F(x',y)$ unter Verwendung von (5). Genauso kommen wir zum Ziel, wenn (x',y) eine Basis ist. Im Fall $y = 0$ ist (6) sowieso richtig. Also bleibt der Fall, wo $x = \alpha y$ und $x' = \beta y$ ist für geeignete $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$; in diesem Fall folgt (6) aus (2) und den Rechenregeln im Bereich der F-Werte. Ganz analog erhält man die folgende Regel.

$$F(x,y+y') = F(x,y) + F(x,y') \text{ für alle } x,y,y' \in \mathbf{P}(U). \tag{7}$$

(In der Sprache der linearen Algebra ist F also eine alternierende, bilineare Abbildung.) Jetzt erhält man ganz einfach eine Formel für das Verhältnis von $F(x,y)$ zu $F(b_1,b_2)$.

$$F(x_1b_1 + x_2b_2, y_1b_1 + y_2b_2) = (x_1y_2 - x_2y_1)F(b_1,b_2) \text{ für alle } x_1,x_2,y_1,y_2 \in \mathbb{R}. \qquad \textbf{(8)}$$

Wir haben somit für den anschaulichen Flächeninhaltsbegriff nicht nur als Tatsache *festgestellt*, dass er die Regeln 1. bis 3. erfüllt, sondern anschließend allein mit diesen Regeln gearbeitet und *bewiesen*, dass auch die Formeln (3) bis (8) gültig sind. Der Wechsel zur dritten Diskursebene erlaubt es, Beweise zu führen! Dieser Wechsel des Standpunktes muss bewusst werden: nicht anschauliche Tatsachen, sonder Wenn-dann-Aussagen werden zum Thema der Mathematik.

Die Formeln (3) bis (8) beinhalten neue Aussagen über den Flächeninhalt orientierter Parallelogramme, die man sich geometrisch veranschaulichen muss. Ihre Gültigkeit ist nicht immer mehr unmittelbar der Anschauung zu entnehmen. Aber wir haben ja einen Beweis.

Die Beweise nachzuvollziehen, ist nicht schwer, da nur legitimierte Termumformungen vorgenommen werden. Dabei kann man ganz von der inhaltlichen Bedeutung des Symbols $F(x,y)$ absehen! Man muss es aber nicht: man kann auch jede Umformung geometrisch nachvollziehen und erhält so einen inhaltlich fundierten Beweis, der bei Schülern zunächst mehr Anerkennung finden dürfte. (Zu diesem Grundproblem algebraischer Umformungen vergleiche man auch den Artikel [21] von Susanne Prediger.)

In der Sekundarstufe II muss man nicht auf der dritten Diskursebene stehen bleiben, sondern kann zum axiomatischen Denken der vierten Diskursebene hinführen. Indem wir F nicht mehr als den anschaulich gegebenen Flächeninhalt der dritten Diskursebene ansehen, sondern als eine beliebige Funktion F mit den Eigenschaften 1. bis 3. auffassen, bewegen wir uns auf der axiomatischen, vierten Diskursebene und *beweisen* in Formel (8), dass die F-Werte einen *eindimensionalen* Vektorraum bilden: das Verhältnis $F(x,y) : F(b_1,b_2)$ ist unabhängig von der Wahl von F, ja es ist eine *Invariante* der linearen Gruppe $GL(\mathbf{P}(U))$ (und somit der affinen Geometrie). Das bedeutet Folgendes. Wir betrachten für Quadrupel (x,y,v,w) von Positionspfeilen, für die (v,w) eine Basis ist, die Funktion i, die definiert ist durch

$$i(x, y, v, w) = \rho, \text{ wenn } F(x, y) = \rho \cdot F(v, w) \text{ ist.}$$

Dann folgt für jede invertierbare lineare Abbildung α auf $\mathbf{P}(U))$, dass auch

$$i(\alpha(x), \alpha(y), \alpha(v), \alpha(w)) = \rho$$

ist! Denn die neue Funktion $F'(x, y) = F(\alpha(x), \alpha(y))$ ist ebenfalls eine „Flächeninhaltsfunktion“ mit Regeln 1. bis 3., erfüllt also auch die Formel (8) mit dem Faktor $x_1y_2 - x_2y_1 = \rho$ für $x = x_1v + x_2w$, $y = y_1v + y_2w$, der nur vom Quadrupel (x, y, v, w) abhängt.

Man kann zeigen, dass das Verhältnis von Flächeninhalten die „einzige“ Invariante der zweidimensionalen linearen Gruppe ist [20, S. 234–239]. Hierauf beruht die Tatsache [20], dass sich die Sätze der affinen Geometrie (etwa die Sätze von Ceva und Menelaos) elementargeometrisch mit Flächeninhaltsargumenten [20, S. 218–219] und im Rahmen der Analytischen Geometrie mit dem Begriff des orientierten Flächeninhalts (Determinanten) [15, II.5] beweisen lassen.

Für den Satz von Pythagoras ist der Flächeninhaltsbegriff für Parallelogramme grundlegend. Selbst die Begriffe Orthogonalität und Quadrat der Anschauungsebene lassen sich auf den Parallelogramminhalt gründen. Das wird in den folgenden Paragraphen durchgeführt.

6. Orthogonalität und Quadrate. Ein orthogonales Geradenpaar realisiert man auf der ersten Diskursebene etwa durch zweimaliges Falten eines Blattes Papier; durch Drehen des entfalteten Blattes in alle Richtunge der Papierebene erhält man zu jeder Geraden die orthogonale Gerade. Auf der zweiten Ebene des Diskurses wählen wir eine Basis $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ des Vektorraums der Positionpfeile der Anschauungsebene fest aus; wir stellen uns die beiden Pfeile als physikalisch orthogonal und gleich lang vor. Zu einem beliebigen Positionspfeil p wollen wir einen orthogonalen durch Anwenden einer „Rechtwinkel-Drehung“ δ erhalten: $\delta(p) \perp p$; dabei liegt es nahe, die Rechtwinkel-Drehung als lineare Abbildung durch ihre Wirkung auf der Basis $\mathcal{E}$ zu beschreiben: auf der dritten Diskursebene *definieren* wir sie als die lineare Abbildung δ, die e_1 auf e_2 und e_2 auf

$-e_1$ abbildet [15, III. §1.2]. Wir nennen nun von 0 verschiedene Positionspfeile x und y *orthogonal*, wenn die eindimensionalen Teilräume $\langle x \rangle$ und $\langle \delta(y) \rangle$ übereinstimmen, also $F(x, \delta(y)) = 0$ ist.

Da wir δ als Drehung interpretieren, sollten p und $\delta(p)$ jeweils *gleich lang* genannt werden. Als *Quadrat* zum Positionspfeil $x = x_1e_1 + x_2e_2$ sollte man demnach das Parallelogramm zum Paar $(x, \delta(x))$ ansprechen. Es hat wegen $\delta(x) = x_1e_2 - x_2e_1$ den Flächeninhalt

$$F(x, \delta(x)) = F(x_1e_1, \delta(x_1e_1)) + F(x_2e_2, \delta(x_2e_2)), \qquad [\mathbf{P}]$$

wie es dem elementargeometrischen Satz des Pythagoras entspricht.

C. Der Satz des Pythagoras

7. Der Satz des Pythagoras auf der vierten Diskursebene. Bei den vorstehenden Begriffsbildungen und Argumentationen hatten wir uns die Basis $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ des Raums der Positionspfeile als physikalisch orthogonal und mit gleich langen Pfeilen *vorgestellt*. Für die Definition von F und δ und für die Argumentation ist dies jedoch unerheblich: für *jede* Basis $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ ist die Formel [**P**] korrekt; allein die formalen Rechenregeln für F werden benötigt (syntaktische Ebene). Im axiomatischen Rahmen der vierten Diskursebene versehen wir diese Formel sehr allgemein mit Sinn. δ hängt von der Wahl von $\mathcal{E}$ ab, ebenso der Begriff Quadrat.

Für einen Positionspfeil x nenne ich das von x und $\delta(x)$ aufgespannte, also zum Paar $(x, \delta(x))$ gehörende orientierte Parallelogramm das *δ–Quadrat über x*.

Ohne neuen Beweis allein durch Abstraktion von konkreten Interpretationen liefert der Beweis von Formel [**P**] die folgende Version des Pythagorassatzes.

Satz des Pythagoras. *Gegeben sei ein Dreieck $[A, B, C]$ mit zugehörigen Positionspfeilen $a, b, 0$ bzgl. des Ursprungs $U = C$. Wir wählen eine Basis $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ (etwa aus Vielfachen von a und b) und betrachten die zu $\mathcal{E}$ gehörende Rechtwinkel-Drehung δ. Dann ist der orientierte Flächeninhalt des δ–Quadrats über $a + b$ (sowie des δ–Quadrats über $a - b$) gleich der Summe der Inhalte der δ–Quadrate über a und über b.*

Diese Formulierung auf der axiomatischen Diskursebene kann und sollte nun allerdings noch auf der zweiten Diskursebene unorthodox interpretiert und durch Zeichnungen (auf der ersten Diskursebene) – denn $\delta(x)$ läßt sich auch zeichnerisch leicht aus x gewinnen – veranschaulicht werden. Siehe Abb. 1.

Abb. 1

[Natürlich ist diese affine Form des Pythagoras-Satzes nicht neu: jede affine Abbildung führt eine Pythagoras-Figur in eine weitere über, wobei die Begriffe „orthogonal“ und „Quadrat“ der Abbildung entsprechend zu interpretieren sind. Einen elementargeometrisch bewiesenen Fall findet man in [22], wo unsere Basis $\mathcal{E}$ der Basis (c, d) in der dortigen Abb. 9 entspricht.]

8. Verallgemeinerung zur binomischen Formel. Der Ausdruck $F(x, \delta(x))$ definiert eine quadratische Form auf den Positionspfeilen; sie wird durch Benutzung zweier Variabler x, y in $F(x, \delta(y))$ linearisiert: die durch $F(x, \delta(y))$ auf Paaren (x, y) gegebene Abbildung ist bilinear. Anders als F ist sie auch *symmetrisch*: $F(x, \delta(y)) = F(y, \delta(x))$, denn

$$F(x_1e_1 + x_2e_2, \delta(y_1e_1 + y_2e_2)) = (x_1y_1 + x_2y_2)F(e_1, e_2)$$

und analog

$$F(y_1e_1 + y_2e_2, \delta(x_1e_1 + x_2e_2)) = (x_1y_1 + x_2y_2)F(e_1, e_2).$$

Man kann diese Abbildung deshalb mit gutem Gewissen ein Produkt nennen und als solches schreiben.

$$x \cdot y := F(x, \delta(y)).$$

In dieser Notation ist das Pfeilpaar (x, y) genau dann δ–orthogonal, wenn $x \cdot y = 0$ ist. (Hier haben wir $F(e_1, e_2) = 1 \in \mathbb{R}$ gesetzt, also den F-Werte-Bereich als $\mathbb{R}$ gewählt.) Allein aus den Rechenregeln für dieses Produkt (nämlich aus Bilinearität und Symmetrie) ergibt sich die binomische Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\, a \cdot b + b^2, \qquad \textbf{[B]}$$

aus der im Fall $a \cdot b = 0$ eines δ–orthogonalen Paares (a, b) die Pythagorasformel folgt. Das Schöne an dieser Produkt-Schreibweise ist, dass sich die binomische Formel mit einem Computeralgebrasystem reproduzieren lässt, was noch einmal ganz deutlich macht, dass wir uns hier auf der rein syntaktischen Diskursebene befinden.

Wie im Pythagorasfall $a \cdot b = 0$ lässt sich auch diese Formel [**B**] durch Flächeninhalte von Parallelogrammen der Form $(x, \delta(y))$ mit beliebigen „Rechtwinkel-Drehungen" δ interpretieren. In Abb. 2 werden physikalisch orthogonale und gleich lange Einheitsvektoren e_1 und e_2 benutzt; das Parallelogram $(2a, \delta(b))$ wird in ein flächengleiches Parallelogramm $(\lambda b, \delta(b))$ verwandelt, um den Flächeninhalt $b^2 - 2a \cdot b$ sichtbar zu machen.

Abb. 2

9. Indefinite Skalarprodukte. Eine symmetrische Bilinearform nennt man allgemein *ein Skalarprodukt*. Wie wir gerade durch Argumentation auf der syntaktischen Ebene sahen, gilt die binomische Formel für beliebige Skalarprodukte. Die quadratische Form zum Produkt aus §8 ist positiv definit wegen $x \cdot x = ({x_1}^2 + {x_2}^2)F(e_1, e_2)$. Eine andere lineare Abbildung, etwa die durch $\sigma(e_1) = e_2$ und $\sigma(e_2) = e_1$ gegebene, liefert ein indefinites Skalarprodukt:

$$x * y := F(x, \sigma(y)).$$

Denn hier ist $x * y = (x_1 y_1 - x_2 y_2)F(e_1, e_2)$. Nun hängt aber der Beweis der binomischen Formel nicht davon ab, ob das Produkt definit ist. Wir haben also einen allgemeinen Pythagoras-Satz auch für σ–Quadrate. [Das σ–Quadrat über a ist das von $(a, \sigma(a))$ aufgespannte Parallelogramm.] Genauso leicht wie $\delta(a)$ lässt sich auch $\sigma(a)$ zeichnerisch aus den σ–Bildern von e_1 und e_2 gewinnen. Siehe Abb. 3.

Abb. 3

Zusammenfassend stellen wir fest, dass der Wechsel von der konkreten dritten Diskursebene zur vierten uns zum Begriff des Skalarproduktes führte. Die alleinige Benutzung seiner formalen Rechenregeln lieferte auf der syntaktischen Ebene die binomische Formel, deren Interpretation über δ– bzw. σ–Quadrate unerwartete geometrische Sätze über Flächeninhalte an Dreiecken produzierte. Wichtig bei diesem Vorgehen ist das Bewusstmachen der jeweiligen Argumentationsbasis.

Weitere Informationen zu affinen Ebenen mit einem indefiniten Skalarprodukt für die Positionspfeile (Minkowski-Ebenen) findet man in [9, Ch. 2.5], den Satz des Pythagoras für Minkowski-Ebenen in [18, S. 64–66]. Zur Galilei-Ebene (mit einem ausgearteten Skalarprodukt $x \circ y = F(x, \varphi(y)) = x_1 y_1 F(e_1, e_2)$ für $\varphi(e_1) = e_2$, $\varphi(e_2) = 0$) verweise ich auf [29, §12].

Auf die Vielfältigen Interpretationen von $\mathbb{R}$-Vektorräumen mit Skalarprodukt (vierte Diskursebene) in physikalischen Theorien der zweiten Diskursebene (Raum-Zeit-Pfeile, Arbeit als Kraft-$\times$Weg-Produkt, ..) weise ich nur hin.

D. Der Höhenschnittpunktsatz

10. Vorschau. Durch bewusste Unterscheidung und Benennung der Diskursebenen im Wissensbildungsprozess kann in Schule und Hochschule wissenschaftliche Vorgehensweise kennengelernt und erlernt werden. Als weiteres Beispiel wird nun der inhaltlich bekannte Höhenschnittpunktsatz für Dreiecke der Anschauungsebene zunächst in der Sprache der vektoriellen Geometrie mit Skalarprodukt gefasst; dabei werden die inhaltlichen Diskursebenen bis zur dritten oder gar vierten Ebene durchlaufen. Der Beweis des Satzes läuft dann ganz einfach über eine Identität für drei (Skalar-)Produktbildungen. Obwohl der Beweis des angestrebten Satzes damit erledigt sein wird, beginnt hier erst weiteres mathematisches Entdecken:

- die ganze Identität wird geometrisch interpretiert, zunächst für ein symmetrisches, dann für ein antisymmetrisches (alternierendes) Produkt; wir erhalten so einen Satz über Q–Abschnittsrechtecke und einen Satz über obere Q–Parallelogramme;
- das Skalarprodukt muss nicht auf die physikalisch übliche Art interpretiert werden, der Höhenschnittpunktsatz und der Satz über Q-Abschnittsrechtecke gelten für beliebige nicht ausgeartete, symmetrische (positiv definite oder indefinite) Bilinearformen (also in euklidischen und in minkowskischen Ebenen).

Diese Erkenntnisse nehmen ihren Anfang auf der rein formalen, syntaktischen Diskursebene. Es verbleibt die Aufgabe, die Identität auf der inhaltlichen Ebene neu zu interpretieren und so zu den neuen geometrischen Erkenntnissen zu kommen. Diese Vorgehensweise kennenzulernen, kann das

Ziel eines Projektes in der Mathematiklehrerausbildung der Hochschule sein.

11. Durchlaufen der semantischen Diskursebenen. Die Ausgangssituation wird auf der *ersten Diskursebene* beschrieben, es geht um den uns umgebenden (physikalischen) Raum, in dem wir Stellen fixieren und durch gegenständliche oder optische Strecken verbinden können.

Schon in der Sekundarstufe I wird der physikalische Raum durch den „Anschauungsraum“ auf der *zweiten Diskursebene* ersetzt (§2); schon auf dieser Diskursebene kann man Analytische Geometrie betreiben: nach Wahl eines festen Ursprungs werden die Punkte durch ihre Positionspfeile ersetzt. Zwei Positionspfeile werden gemäß der Parallelogrammregel addiert.

Sind die Addition von Positionspfeilen und die Multiplikation mit Skalaren wohldefiniert, und welche formalen Rechenregeln gelten hier? Mit Hilfe von Aussagen über den Anschauungsraum, die im Rahmen der Schulgeometrie als richtig akzeptiert werden, kann man diese Fragen beantworten. [In einer Vorlesung zu den Grundlagen der Geometrie führen diese Fragen auf ein Axiomensystem für desarguesche affine Ebenen und Räume.]

Auf einer *dritten Diskursebene* betrachten wir den konkreten Vektorraum aller Positionspfeile von einem festen Ursprung (über einem Teilkörper von $\mathbb{R}$) und interpretieren und beweisen Aussagen der affinen Geometrie allein mit Hilfe der Vektorraum-Rechenregeln. Der Begriff der Orthogonalität von Geraden einer Ebene kann durch den Flächeninhalt von Parallelogrammen ausgedrückt werden (§2) und führt auf das Produkt $p(a, b) = F(a, \delta(b))$:

ein Paar (a, b) von Positionspfeilen ist genau dann orthogonal, wenn $F(a, \delta(b)) = 0$ ist.

Damit ist nicht nur die Grundlage auf der dritten Diskursebene für einen regelhaften Umgang mit Orthogonalität gegeben, sondern sogleich auch der Übergang auf die syntaktische Diskursebene nahegelegt.

12. Übergang zur syntaktischen Diskursebene. Man stellt leicht fest, dass die neue Funktion $p(a, b) = F(a, \delta(b))$ die üblichen Rechenregeln für ein Produkt erfüllt: es handelt sich bei p um eine (positiv definite) *symmetrische* Bilinearform. Statt $p(a, b)$ schreiben wir deshalb einfach

$$a \cdot b = F(a, \delta(b)).$$

13. Beweis des Höhenschnittpunktsatzes auf der syntaktischen Diskursebene. Wir beschreiben ein Dreieck $[A, B, C]$ der Anschauungsebene wie bisher durch seine Positionspfeile a, b, c bzgl. eines festen Ursprungs U. Wir wählen zwei Seiten des Dreiecks aus, etwa die durch $b - c$ und $c - a$ beschriebenen. Da sie durch den Punkt C gehen, sind sie nicht parallel, d. h. $(b - c, c - a)$ ist linear unabhängig. Deshalb ist auch $(\delta(b - c), \delta(c - a))$ linear unabhängig, und die Höhen zu diesen Seiten schneiden sich in einem Punkt H mit Positionspfeil h. Es ist zu zeigen, dass die Gerade CH orthogonal zu AB ist, also $(c - h) \cdot (a - b) = 0$ ist. Dabei ist $(a - h) \cdot (b - c) = 0$ und $(b - h) \cdot (c - a) = 0$ nach Definition von H. Wir haben die (physikalische) Orthogonalität der ersten Diskursebene durch das positiv-definite Skalarprodukt p ersetzt. Zum Beweis des Höhenschnittpunktsatzes betrachten wir ganz formal den symmetrisch in a, b, c gebildeten Term

$$L := (a - h) \cdot (b - c) + (b - h) \cdot (c - a) + (c - h) \cdot (a - b),$$

also die Summe der drei uns interessierenden Produkte. Wenn L allgemein gleich 0 ist, können wir aus dem Verschwinden von zwei dieser Summanden auf das Verschwinden des dritten schließen. Deshalb führen wir die folgende Termumformung durch.

$$\begin{aligned} L &= a(b - c) + b(c - a) + c(a - b) - h[(b - c) + (c - a) + (a - b)] \\ &= (ab - ba) + (bc - cb) + (ca - ac) =: K. \end{aligned}$$

Für eine *symmetrische* Bilinearform wie p ist also $L = 0$. Per Rückkehr zur semantischen Ebene ist der Höhenschnittpunktsatz für die durch den $\mathbb{R}$–Vektorraum der Positionspfeile mit Bilinearform p beschriebenene Anschauungsebene bewiesen.

Satz A (Höhenschnittpunkt).

Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt.

14. Interpretation der Formel $L = 0$. Der Höhenschnittpunktsatz ergab sich im speziellen Fall der Formel $L = 0$, wo jeder der drei Summanden gleich 0 ist. Die Formel gilt nach §13 nicht nur für den Positionspfeil h zum Höhenschnittpunkt H! Vielmehr ist für beliebige Punkte Q mit Positionspfeil q der Ausdruck

$$L(q) := (a-b)\cdot(c-q) + (b-c)\cdot(a-q) + (c-a)\cdot(b-q)$$

gleich 0. Was bedeutet diese Formel $L(q) = 0$ allgemein?

Für beliebige Punkte P bezeichne ich mit P_C den Lotfußpunkt von P auf AB, mit p_C den Positionspfeil von P_C. Wir zerlegen im ersten Summanden $c - q$ orthogonal in

$$c - q = (c - h_C) + (h_C - q_C) + (q_C - q) \text{ mit } h_C - q_C \in \langle a-b\rangle \text{ und } c - h_C + q_C - q \in \langle \delta(a-b)\rangle,$$

$(a-b, \delta(a-b))$ ist ja eine Basis. Dann ist $(a-b)\cdot(c-q) = (a-b)\cdot(h_C - q_C) = F(a-b, \delta(h_C - q_C))$ der orientierte Flächeninhalt des δ–Rechtecks aus $\overline{BA}$ und $\overline{Q_C H_C}$. Dieses Rechteck nenne ich das *Q–Abschnittsrechteck* (bzgl. δ) *zur Seite BA*. Dies ergibt die folgende Interpretation von $L = 0$ (s. Abb. 4).

Satz B (Q–Abschnittsrechtecke).
Für ein Dreieck $[A, B, C]$ und einen beliebigen Punkt Q ist die Summe der orientierten Flächeninhalte der drei Q–Abschnittsrechtecke des Dreiecks gleich 0.

Abb. 4

Der Spezialfall, wo Q ein Eckpunkt des Dreiecks ist, liefert die Flächengleichheit zweier Rechtecke (s. Abb. 5). Ist das Dreieck auch noch rechtwinklig (etwa $H = C$ und $Q = B$), so erhalten wir den Kathetensatz, als Folgerung also den Satz des Pythagoras. Die Differenz der Kathetenquadrate ergibt sich, wenn man das rechtwinklige Dreieck $[A, B, C]$ mit $H = C$ zu einem Rechteck $\begin{bmatrix} A & C \\ Q & B \end{bmatrix}$ ergänzt.

Abb. 5

[Zum Vergleich deute ich einen elementar-geometrischen Beweis von Satz B auf der zweiten Diskursebene an. Wenn Q ein Eckpunkt, etwa B, ist, liefern die winkelgleichen Dreiecke $[C, H_C, B]$ und $[A, H_A, B]$ die Proportion $c' : \overline{CB} = a' : \overline{BA}$, wie gewünscht. – Nun sei Q auf einer Höhe, etwa auf HC, so dass $c' = 0$ ist. Der Fall $Q = C$ liefert $\overline{H_A C} : \overline{AC} = \overline{H_B C} : \overline{CB}$. Nach dem ersten Strahlensatz ist $b' : \overline{H_B C} = \overline{QH} : \overline{QC} = a' : \overline{H_A C}$. Aus beidem ergibt sich $\overline{AC}b' : \overline{CB} = a'$. – Den allgemeinen Fall führen wir auf die schon bewiesene Situation zurück. Q liege im Dreieck $[A, H, H_B]$. Wir betrachten das Parallelogramm $\begin{bmatrix} H & Q' \\ Q'' & Q \end{bmatrix}$ mit zu HC und HA parallelen Seiten; der Lotfußpunkt auf BC sei $Q_A = Q'_A$, die auf AB seien Q_C, Q'_C und Q''_C. Offenbar ist $c' = \overline{Q_C Q'_C} + \overline{Q'_C H_C}$ und $\overline{Q_C Q'_C} = \overline{Q''_C H_C}$. Für Q'' und Q' ist der Satz schon bewiesen: $\overline{AC}b' = \overline{BA} \cdot \overline{Q''_C H_C} = \overline{BA} \cdot \overline{Q_C Q'_C}$ und $\overline{CB}a' = \overline{BA} \cdot \overline{Q'_C H_C}$. Addition ergibt $\overline{AC}b' + \overline{CB}a' = \overline{BA}c'$, wie gewünscht. – Leider muss man je nach Lage von Q die richtige Summe für die *absoluten* Streckenlängen und *absoluten* Flächeninhalte bilden. Die Vektorrechnung überwindet diese technische Schwierigkeit.]

Ich möchte nebenbei noch auf eine Verallgemeinerung unseres Ansatzes hinweisen, die auf den Satz von Steiner über kopunktale Seitensenkrechte führt. Statt von einem Punkt Q und seinen Lotfußpunkten Q_A, Q_B und Q_C auszugehen, betrachten wir beliebige Punkte A', B' und C' und fragen nach einem Kriterium für den Fall, dass deren Lote auf BC, CA bzw. AB durch einen gemeinsamen Punkt gehen. Statt $L(q)$ betrachten wir jetzt

$$L'(q) = (a' - q)(b - c) + (b' - q)(c - a) + (c' - q)(a - b),$$

was sich wieder als unabhängig von q erweist: $K' = L'(h) = L'(m) = L'(w)$ für den Höhenschnittpunkt H, den Mittelsenkrechtenschnittpunkt M und den Winkelhalbierendenschnittpunkt W. Wir setzen $T_1 = (a - b')^2 + (b - c')^2 + (c - a')^2$ und $T_2 = (a - c')^2 + (b - a')^2 + (c - b')^2$ und erhalten ganz formal $L(q) = T_1 - T_2 - 2L'(q)$, also $2L'(q) = T_1 - T_2$ wegen $L = 0$. Ist nun Q der Schnittpunkt zweier Lote, so geht das dritte Lot genau dann ebenfalls durch Q, wenn $L'(q) = 0$ ist, also wenn $T_1 = T_2$ ist; das ist der Satz von Steiner [2].

15. Interpretation der Formel $L = K$. Nutzt man die Symmetrie des Skalarproduktes in §13 nicht aus, so erhält man die Formel $L(q) = K$ für beliebige Punkte Q mit Positionspfeil q. Der Ausdruck K hängt ersichtlich nicht von q ab. Wegen der Differenzen hängt L und damit K nicht von der Wahl des Ursprungs U ab: wir wählen $U = A$, denn dann wird $a = 0$, und wir erhalten $K = bc - cb$. Für die antisymmetrische Bilinearform

$$xy = F(x, y)$$

ist $K = 2bc = 2F(b, c)$ das Vierfache des Dreiecksinhaltes. L ist nun leicht zu interpretieren. Der erste Summand $(a - b) \cdot (c - q)$ in der Definition von L in §14 ist jetzt der orientierte Flächeninhalt $F(a - b, c - q)$ des *oberen Q–Parallelelogramms zur Seite BA*, dessen Gegenseiten die Parallelen zu BA durch Q und durch C sowie die Parallelen zu QC durch A und durch B sind. Der folgende Satz C wird durch Abb. 6 veranschaulicht.

Satz C (obere Q–Parallelogramme).
Für ein Dreieck ist die Summe der orientierten Flächeninhalte der drei oberen Q–Parallelogramme gleich dem Vierfachen des Dreiecksflächeninhalts.

Abb. 6
Abb. 7

[Nachdem dieser Satz formuliert ist, lässt er sich auch elementargeometrisch beweisen. Im Dreieck $[A, B, C]$ mit Inhalt F bilden wir zur Seite BC das *volle Q-Parallelogramm*, dessen Seiten BC und die Parallele zu BC durch A sowie die Parallelen zu AQ durch B und durch C sind. Es hat den doppelten Dreiecksinhalt $2F$. Durch die Parallele zu BC durch Q wird es in zwei Teilparallelogramme zerlegt: das *obere Q-Parallelogramm* zur Seite BC und das *untere Q-Parallelogramm* zu BC. Letzteres hat als orientierten Inhalt das Doppelte des Inhaltes des Dreiecks $[B, C, Q]$. Die Summe der Inhalte aller drei unteren Q-Parallelogramme ist ersichtlich $2F$, weil das Dreieck $[A, B, C]$ durch Q in drei Teildreiecke zerlegt wird. Deshalb ist die Summe der Inhalte aller drei oberen Q-Parallelogramme als Summe der Inhalte der drei vollen Q-Parallelogramme abzüglich der Summe der Inhalte der drei unteren Q-Parallelogramme gleich $3 \cdot 2F - 2F = 4F$.]

Das Kreuzprodukt im dreidimensionalen euklidischen Raum führt auf eine zu Satz C verwandte dreidimensionale Interpretation der Formel $L = K$.

16. Reinterpretation des Skalarproduktes. Die rein formale Rechnung in §13 hat gezeigt, dass die dortige Argumentation für beliebige symmetrische bilineare Abbildungen gültig ist. Als erstes brauchen wir uns die Basis (e_1, e_2), auf deren Wahl die Definition von δ beruht, nicht mehr als physikalisch orthogonal mit gleich langen Positionspfeilen vorzustellen. In einer Zeichnung (erste Diskursebene) können andere Wahlen getroffen werden, die neue Interpretation von „orthogonal" führt auf den Höhenschnittpunktsatz und den Satz über Q–Abschnittsrechtecke für beliebig interpretierte Basen (e_1, e_2) als metrischer Grundlage für eine euklidische Ebene (s. Abb. 8).

Abb. 8

Als nächstes können wir versuchen, durch Variation der Abbildung δ qualitativ neue Skalarprodukte zu gewinnen. An Stelle von δ führt die lineare Abbildung σ, die e_1 mit e_2 vertauscht, auf ein (nicht ausgeartetes) indefinites Skalarprodukt

$$a * b = F(a, \sigma(b)).$$

Ein Paar (a, b) heißt immer noch *orthogonal*, wenn $a * b = 0$ ist. Der Höhenschnittpunktsatz gilt auch in dieser „Minkowski-Ebene" [18, S. 64–66] (s. Abb. 9), der Satz über Q–Abschnittsrechtecke nur wenn die Lotfußpunkte existieren, also die Dreiecksseiten nicht *isotrop* sind, d. h. wenn $s * s \neq 0$ ist für die die Seiten beschreibenden Pfeile $s = a - b$, $s = b - c$ und $s = c - a$ (Abb. 9). [Die einzigen isotropen Richtungen sind $\langle e_1 + e_2 \rangle$ und $\langle e_1 - e_2 \rangle$.]

Abb. 9

Eine weitere lineare Abbildung, nämlich die nicht invertierbare lineare Abbildung π, die e_1 auf e_2 und e_2 auf 0 abbildet, führt auf ein ausgeartetes Skalarprodukt $x \circ y = F(x, \pi(y))$ und die sogenannte „Galilei-Ebene" [29, §12].

Ganz ähnlich wie hier der Höhenschnittpunktsatz lässt sich der Satz von Bodenmiller über die Schnittpunkte der Thaleskreise über den drei Diagonalen eines Vierseits mit sechs Schnittpunkten behandeln [7]; der Thaleskreis über einem Zweieck $[D, E]$ wird ja durch die Punkte X mit verschwindendem Skalarprodukt $(x - d) \cdot (x - e) = 0$ gegeben.

17. Ausblick. In den dargestellten Beispielen des Satzes von Pythagoras und des Höhenschnittpunktsatzes wurden anschauliche Vorstellungen begrifflich präzisiert, bis sie (auf der dritten Diskursebene) eine Argumenationsbasis hergaben, die dann (auf der syntaktischen Ebene) auf eine Identität führte, die wiederum mannigfache anschauliche Interpretationen gestattete. Neben der Berücksichtigung der Lernstufen des Schülers im genetischen Unterricht ([26], [13]) kann hinsichtlich des Stoffes das Bewusstmachen der jeweiligen Diskursebene (Argumentationsbasis) dem Lehrer helfen, beim Schüler Verstehen zu fördern und mathematisches Denken erleben zu lassen.

Literatur

[1] R. Baer. Hegel und die Mathematik. In B. Wigersma, editor, *Verhandlungen des 2. Hegelkongresses (18. - 21. Oktober 1931 in Berlin)*, Veröffentlichungen des Internationalen Hegelbundes, Hegelkongress 1, S. 104–120. Tübingen: Mohr, 1932.

[2] S. Deschauer. Steiners Satz über die kopunktalen Seitensenkrechten des Dreiecks im Geometrieunterricht. *Prax. Math.*, 31:86–108, 1989. ISSN 0032-7042, 1617-6960.

[3] G. Ewald. Das Problem des Exakten in der Geometrie. *Math. Naturw. Unterricht (MNU)*, 30(8):449–453, 1977. ISSN 0025-586.

[4] R. Fischer und G. Malle (unter Mitarbeit von H. Bürger). *Mensch und Mathematik – Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln.* Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik 1. Zürich, Mannheim: Bibliographisches Institut, 1985, 1989. ISBN 3-86025-475-8, 3-411-03117-4.

[5] H. Freudenthal. Logik als Gegenstand und als Methode. *Der Mathematikunterricht*, 13(5):7–22, 1967. ISSN 0025-5807.

[6] H. Freudenthal. *Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 1.* Klett-Studienbücher Mathematik. Stuttgart: Klett, 1973.

[7] R. Fritsch. Gudermann, Bodenmiller und der Satz von Bodenmiller-Steiner. *Didaktik der Mathematik*, 20(3):165–187, 1992. ISSN 0722-7817.

[8] K. Fritsche. Was ist Euklidische Geometrie? In Jürgen Blankenagel and Wolfgang Spiegel, editors, *Mathematikdidaktik aus Begeisterung für die Mathematik. Festschrift für Harald Scheid*, pages 54–72. Stuttgart: Ernst Klett Verlag, 2000. ISBN 3-12-983380-3.

[9] R. Goldblatt. *Orthogonality and Spacetime Geometry.* Universitext. New York: Springer–Verlag, 1987. ISBN 0-387-96519-X, 3-540-96519-X.

[10] H. Griesel. Lokales Ordnen und Aufstellen einer Ausgangsbasis, ein Weg zur Behandlung der Geometrie der Unter- und Mittelstufe. *Der Mathematikunterricht*, 9(4):55–65, 1963. ISSN 0025-5807.

[11] T. L. Heath, Hrsg. *The Thirteen Books of Euclid's Elements (in 3 Volumes).* Dover Reprint Series. Dover, 1956.

[12] L. Hefendehl-Hebeker. Geometrie-Unterricht als Chance für die Mathematik. *Mathematica Didactica. Zeitschrift für Didaktik der Mathematik*, 20(2):79–93, 1997. ISSN 0170-1541. Review: Mathematics Didactics Database at http://www.emis.de/.

[13] L. Hefendehl-Hebeker. Aspekte eines didaktisch sensiblen Mathematikverständnisses. *Math. Semesterber.*, 45:189–206, 1998. ISSN 0340-4897.

[14] H. von Hentig. *Bildung - ein Essay.* Darmstadt: Wiss. Buchges. (Lizenzausgabe), 1997. Nach der Ausgabe München: Hanser, 1996; ISBN 3-446-18751-0.

[15] M. Koecher und A. Krieg. *Ebene Geometrie.* Springer–Lehrbuch. Berlin: Springer–Verlag, ^{2}2000. ISBN 3-540-67643-0.

[16] S. Krämer. *Symbolische Maschinen: die Idee der Formalisierung in geschichtlichem Abriß.* Darmstadt: Wiss. Buchgesellschaft, 1988. ISBN 3-534-03207-1.

[17] K. Lengnink und W. Peschek. Das Verhältnis von Alltagsdenken und mathematischem Denken als Inhalt mathematischer Bildung. In Katja Lengnink, Susanne Prediger und Frankziska Siebel, editor, *Mathematik und Mensch: Sichtweisen der Allgemeinen Mathematik*, Darmstädter

Schriften zur Allgemeinen Wissenschaft, Bd. 2, pages 65–82. Mühltal: Verl. Allg. Wiss. - HRW e. K., 2001. ISBN 3-935924-01-1.

[18] D.-E. Liebscher. *Einsteins Relativitätstheorie und die Geometrien der Ebene. Illustrationen zum Wechselspiel von Geometrie und Physik.* Stuttgart: Teubner, 1999. ISBN 3-519-00278-7.

[19] G. Malle. Begründen. Eine vernachlässigte Tätigkeit im Mathematikunterricht. Wenn wir das Begründen im Unterricht verbessern wollen, müssen wir unsere Sicht vom Begründen ändern. *Mathematik lehren*, 110:4–8, Februar 2002. ISSN 0175-2235.

[20] D. Perrin. Eine Ergänzung zum Bericht über Geometrie der Kommission Kahane: das Beispiel der affinen Geometrie im Collège. *Math. Semesterber.*, 48(2):211–245, 2002. ISSN 0340-4897.

[21] S. Prediger. „Was bedeutet das eigentlich, wenn ich zwei Gleichungen addiere, um eine Variable weg zu kriegen?“ Ein Dialog von der geometrischen Deutung eines Lösungsverfahrens für lineare Gleichungssysteme bis zum „Sinn des sinnlosen Umformens“. *Prax. Math. in der Schule*, 45(3):132–135, 2003. ISSN 0032-7042.

[22] C. Rühenbeck. Pythagoras und so. *Math. Naturwiss. Unterr. (MNU)*, 46(7):405–407, 1993. ISSN 0025-5866.

[23] E. Sperner. *Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra, 1. Teil.* Studia Mathematica / Mathematische Lehrbücher 1. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, ^{4}1959.

[24] R. J. Trudeau. *Die geometrische Revolution.* Basel: Birkhäuser, 1998. ISBN 3-7643-5914-5.

[25] Pierre M. van Hiele. *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education.* Developmental Psychology Series. Orlando et al.: Acad. Press, 1986. ISBN 0-12-714161-8.

[26] M. Wagenschein. *Ursprünglichens Verstehen und exaktes Denken: pädagogische Schriften; Bd. I.* Erziehungswissenschaftliche Bücherei. Stuttgart: Ernst Klett Verlag, 1965.

[27] H. Winter. *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik.* Didaktik der Mathematik. Braunschweig: Vieweg, 1989. ISBN 3-528-08978-4.

[28] E. Wittmann. Themenkreismethode und lokales Ordnen. *Der Mathematikunterricht*, 20(1):5–18, 1974. ISSN 0025-5807.

[29] I. M. Yaglom. *A Simple Non–Euclidean Geometry and Its Physical Basis. An Elementary Account of Galilean Geometry and the Galilean Principle of Relativity.* Heidelberg Science Library. New York u. a.: Springer–Verlag, 1979. ISBN 3-540-90332-1.

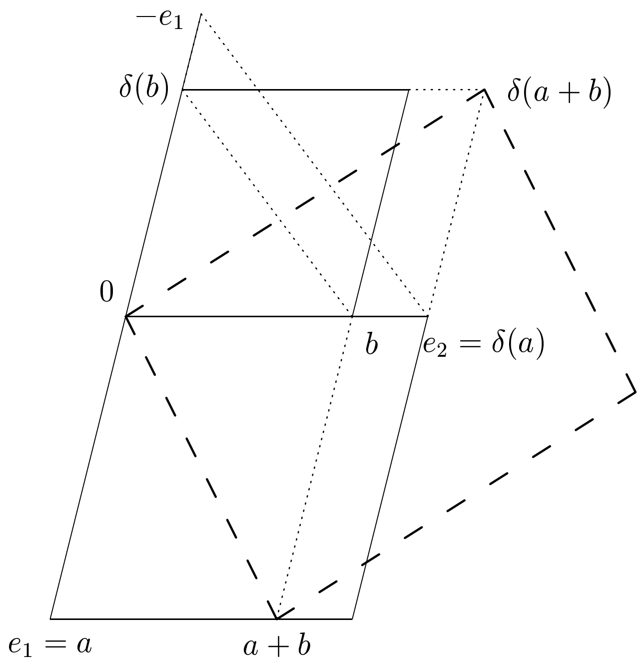

Abb. 1: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

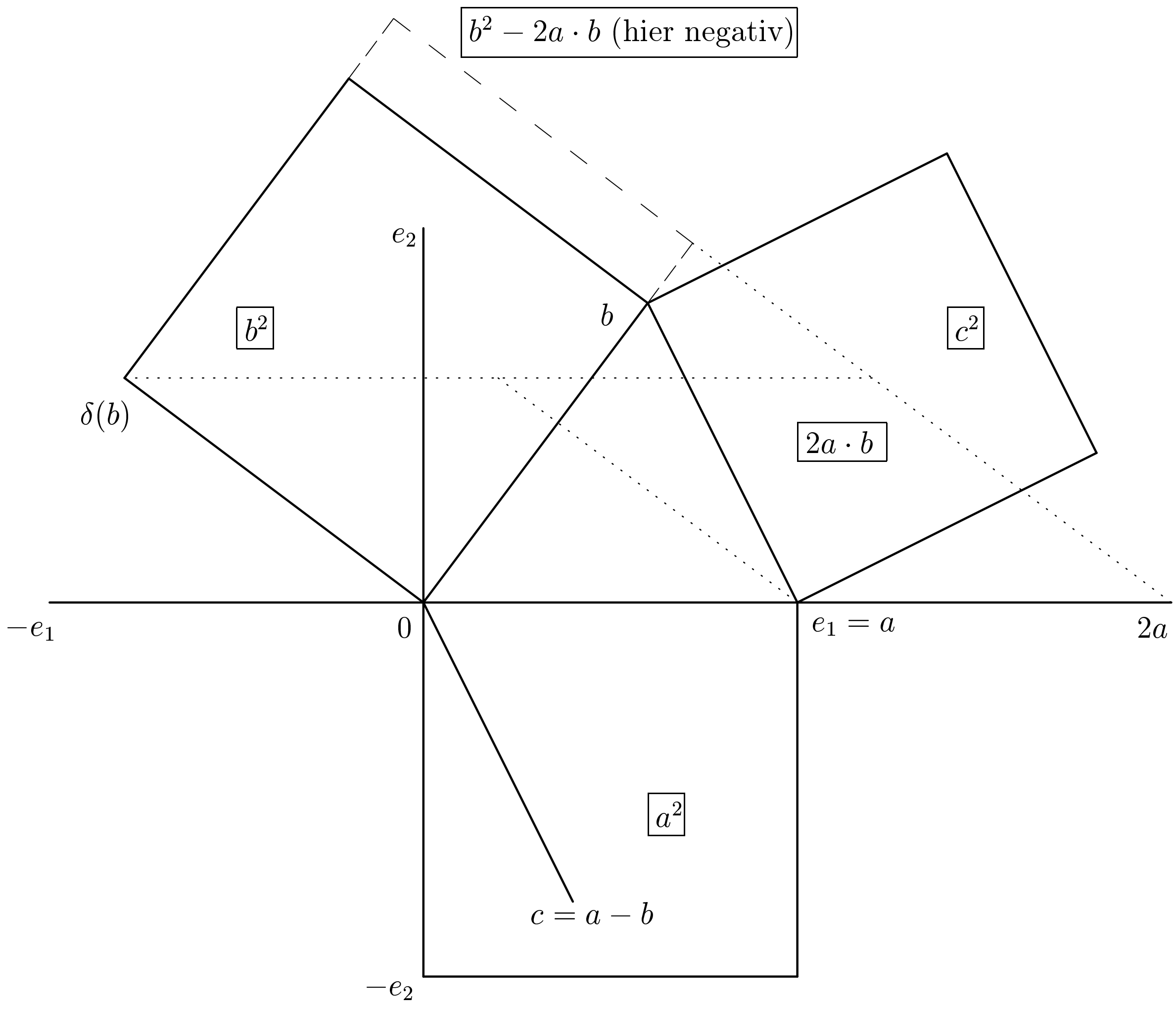

Abb. 2: $c^2 = (a-b)^2 = a^2 + (b^2 - 2a \cdot b)$

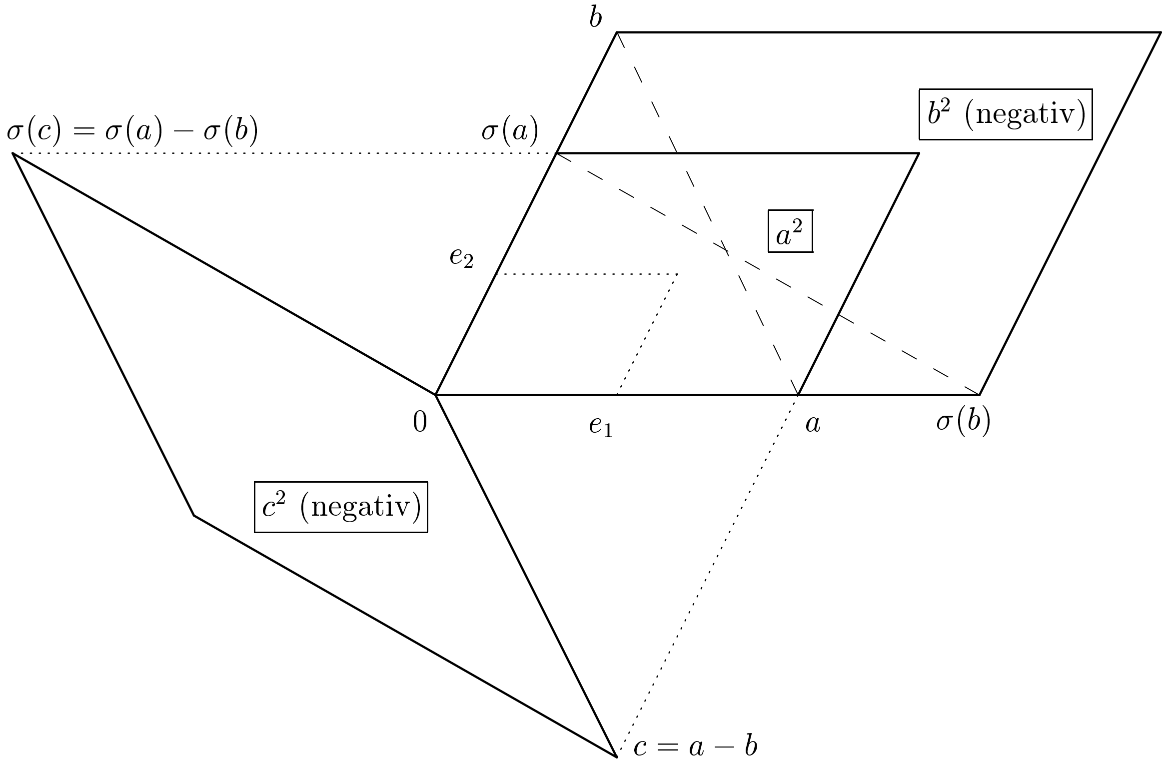

Abb. 3: $c^2 = (a-b)^2 = a^2 + b^2$ für ein indefinites Skalarprodukt

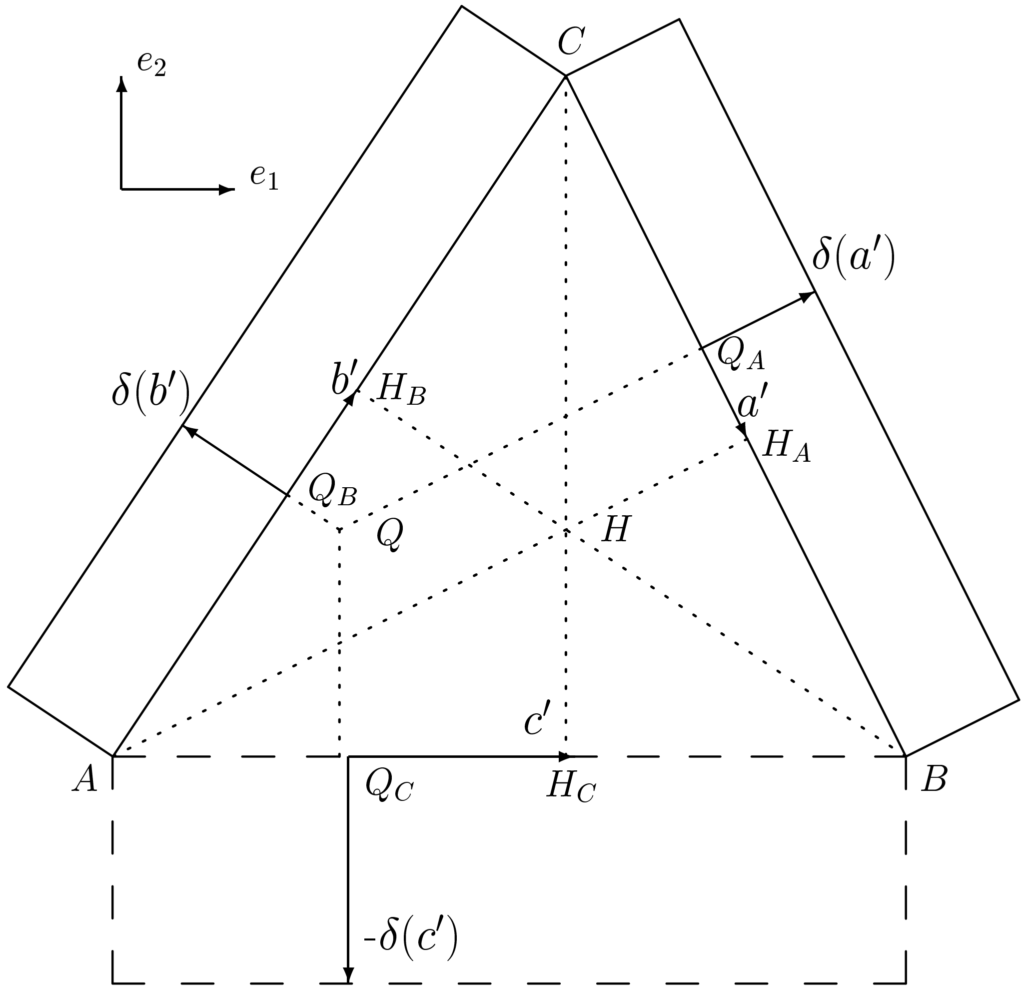

Abb. 4: Q–Abschnittsrechtecke

$$F(b-c,\delta(a'))+F(c-a,\delta(b'))=F(a-b,\delta^{-1}(c'))$$

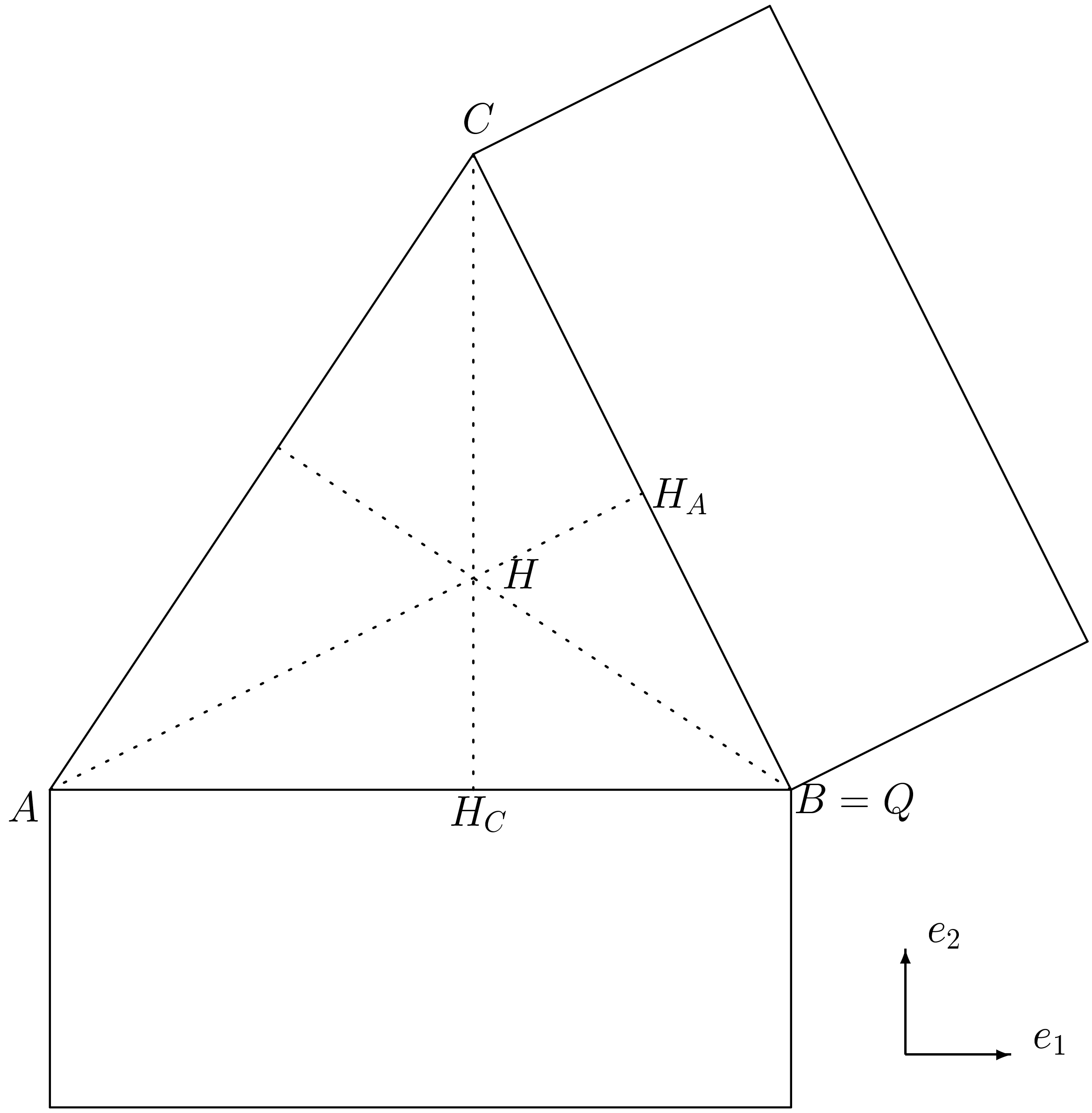

Abb. 5: Flächengleiche B–Abschnittsrechtecke

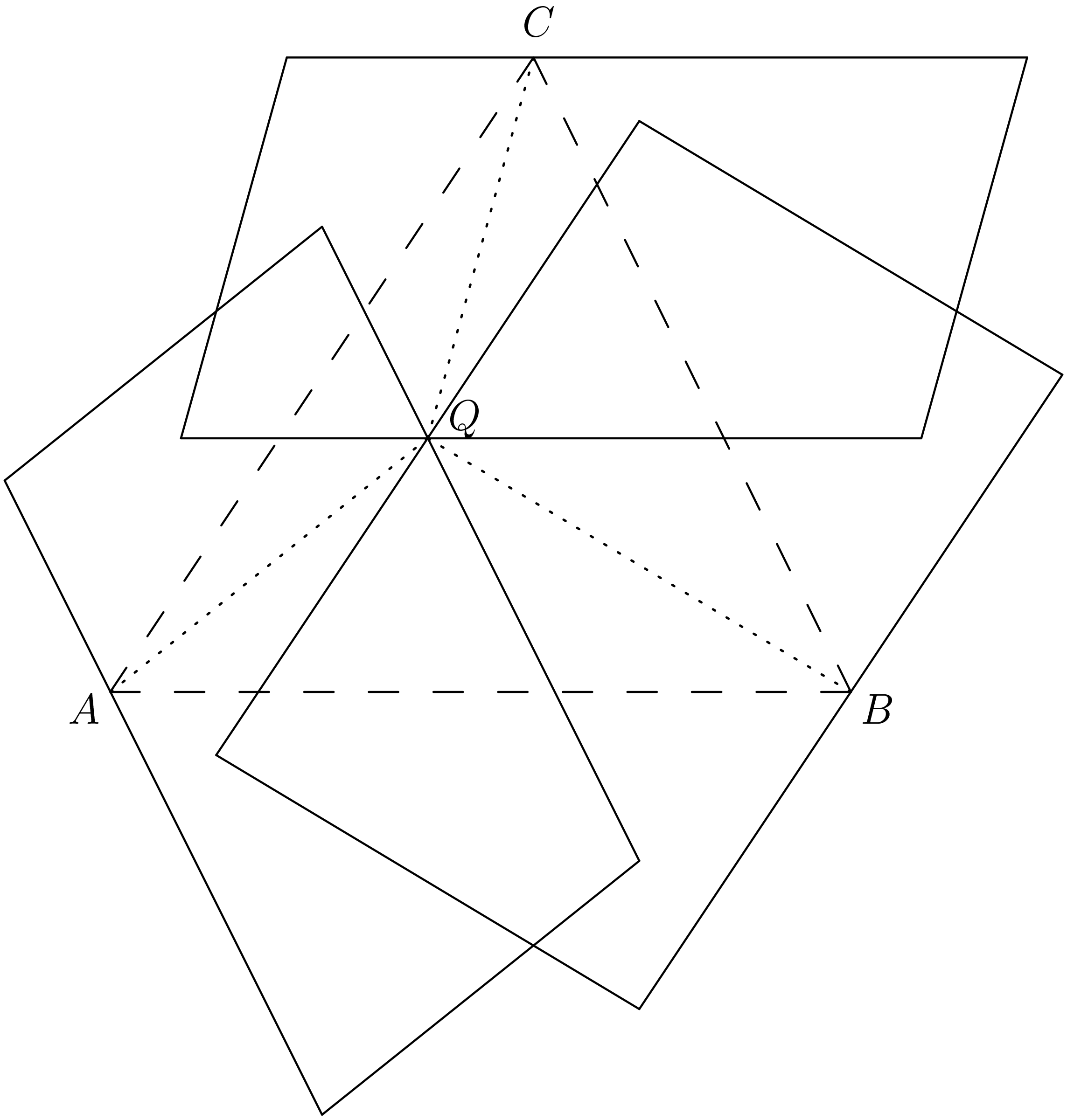

Abb. 6: Drei obere Q–Parallelogramme ergeben das Vierfache des Dreiecksinhalts

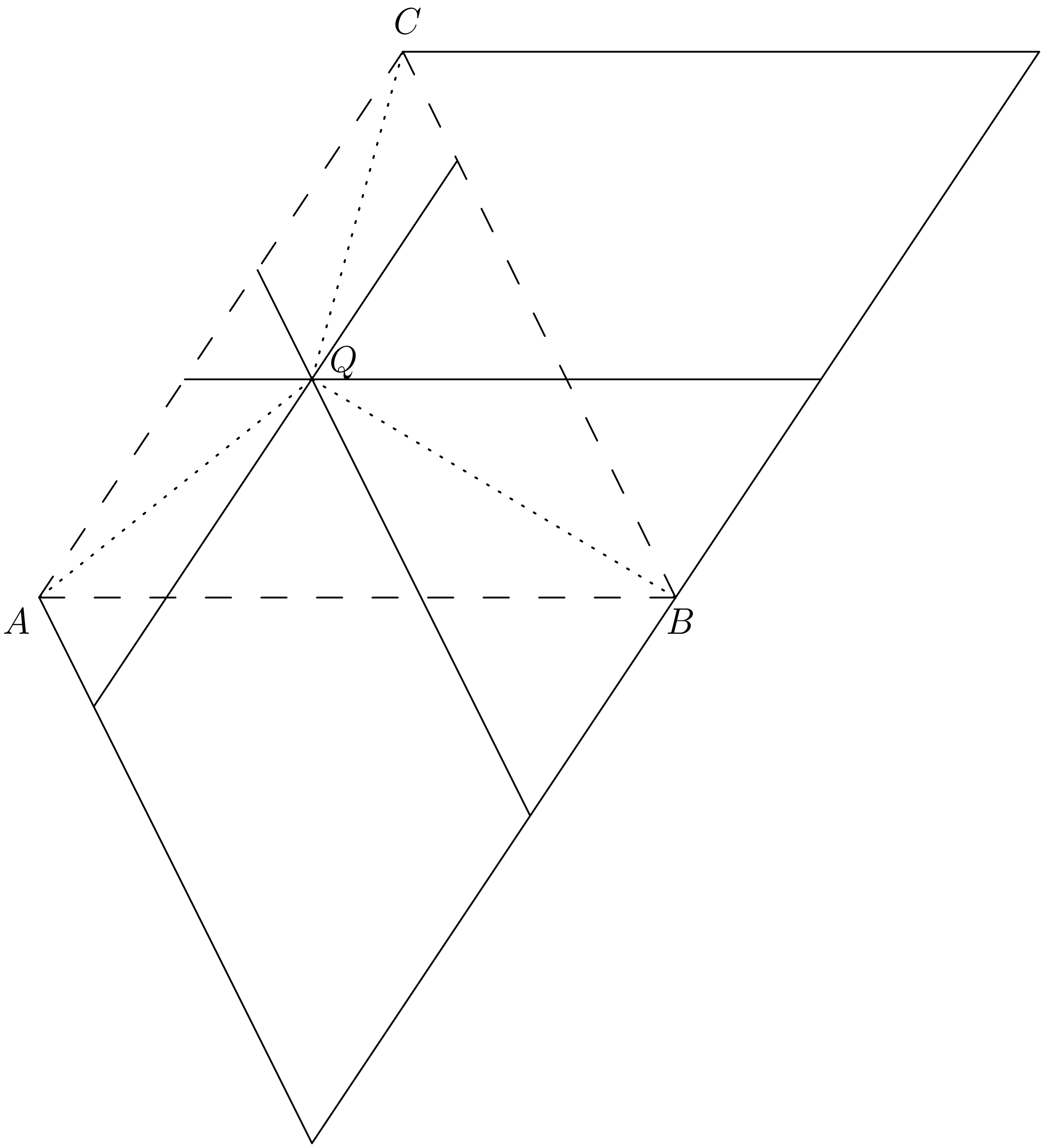

Abb. 7: Drei Parallelogramme durch Q ergeben ersichtlich das Vierfache des Dreiecksinhalts

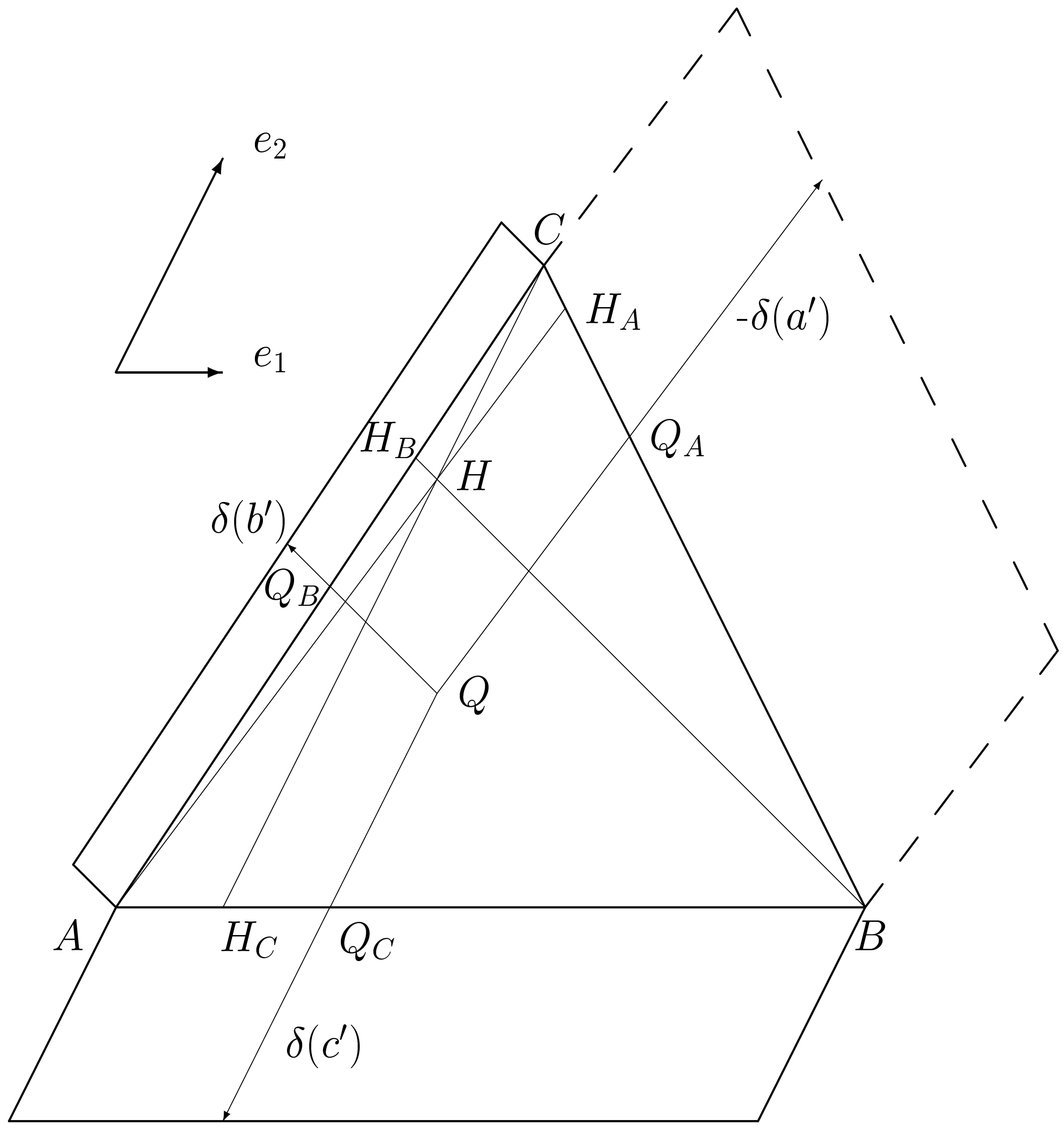

Abb. 8: Höhenschnittpunkt und Q–Abschnittsrechtecke

bei „verzerrter Basis“

$F(c-a, \delta(b')) + F(a-b, \delta(c')) = F(b-c, -\delta(a'))$

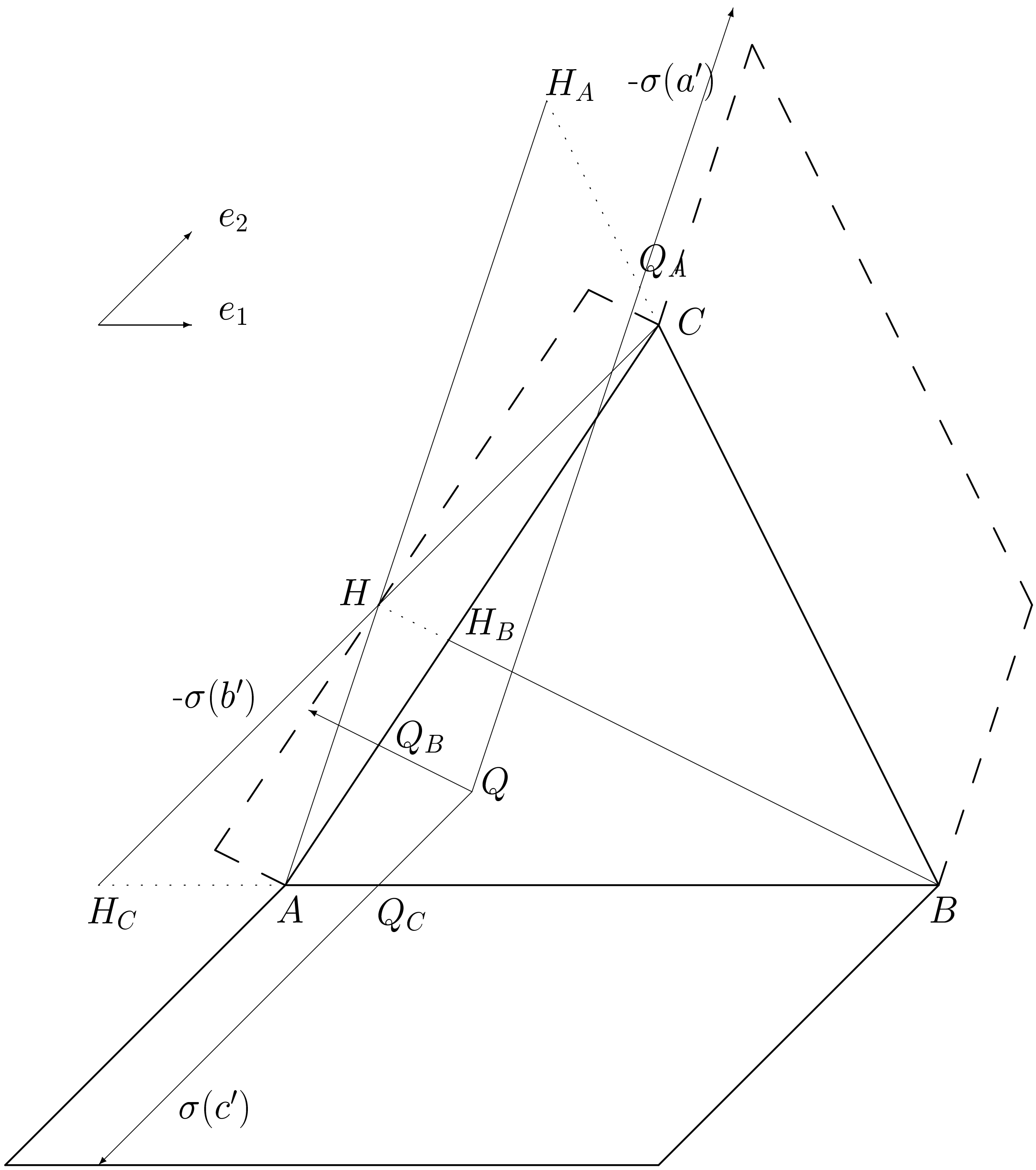

Abb. 9: Höhenschnittpunkt und Q–Abschnittsrechtecke

in einer Minkowski-Ebene

$F(a-b, \sigma(c')) = F(b-c, -\sigma(a')) + F(c-a, -\sigma(b'))$