

Scheinklausur (Teil B), 14.2.2003

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Scheinklausur (Teil B), 14.2.2003, Ankreuzteil, Gruppe B

Kreuzen Sie bei jeder Frage der Aufgaben 1 bis 5 entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an. Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg. Wenn Sie bei einer Frage unsicher sind, machen Sie einfach kein Kreuz.

1	Sind die folgenden Aussagen über einen vierdimensionalen $\mathbb{3}$ -Vektorraum V und einen affinen Raum \mathcal{P} über V richtig?	
	V hat genau 30 eindimensionale Teilräume.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Durch jeden Punkt in \mathcal{P} gehen mindestens 50 Geraden.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Jede Ebene in \mathcal{P} hat genau 9 Punkte.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	V besitzt über eine Million Basen.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
2	Es seien K ein Körper und V und W Vektorräume über K . Weiter sei $\varphi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung.	
	Ist φ surjektiv und (v_1, v_2, v_3) eine Basis von V , dann ist $(\varphi(v_1), \varphi(v_2), \varphi(v_3))$ ein Erzeugendensystem von W .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Wenn φ injektiv ist, dann ist $\dim V \leq \dim W$.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Sind $v_1, v_2, v_3 \in V$ und ist $(\varphi(v_1), \varphi(v_2), \varphi(v_3))$ linear unabhängig, dann ist (v_1, v_2, v_3) linear abhängig.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
3	Sind die folgenden Abbildungen $\varphi : V \rightarrow W$ zwischen den K -Vektorräumen V und W linear?	
	$K = \mathbb{R}$, $V = W = K$ -Polynome vom Grad ≤ 1 , $\varphi = (p(X) \mapsto p(X) - 1)$.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	$K = \mathbb{R}$, $V = W = K[X]$, $\varphi = (p_0X^0 + p_1X^1 + \dots + p_nX^n \mapsto p_0X^0 + p_2X^2 + p_3X^3 + \dots + p_nX^n)$.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	$K = \mathbb{R}$, $V =$ auf \mathbb{R} differenzierbare Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\varphi = (f \mapsto f')$ [mit f' ist hier die erste Ableitung gemeint].	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
4	Es sei V der vierdimensionale \mathbb{C} -Vektorraum \mathbb{C}^4 .	
	Es gibt einen Endomorphismus von V , der die Eigenwerte 2, 4 und 6 hat und sonst keine.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Es gibt zu jedem $c \in \mathbb{C}$ genau einen Endomorphismus von V , der einen vierdimensionalen Eigenraum zum Eigenwert c hat.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Ein Endomorphismus φ von V ist genau dann invertierbar, wenn 0 nicht Eigenwert von φ ist.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Jeder Endomorphismus von V hat vier paarweise verschiedene Eigenwerte.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
5	Wir betrachten \mathbb{R} -Vektorräume V mit einem Endomorphismus φ .	
	Gibt es ein Beispiel, wo das \mathbb{R} -Polynom $X^2 + 3$ das Minimalpolynom von φ teilt und der Hauptraum zu $X^2 + 3$ eine Eigenvektorbasis besitzt?	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Gibt es ein Beispiel, wo das Minimalpolynom von φ gleich $(X - 3)^2(X - 5)^2$ ist und V keine Eigenvektorbasis besitzt?	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Gibt es ein Beispiel, wo der Durchschnitt zweier verschiedener Haupträume nicht der Nullteilraum ist?	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Gibt es zu einem gegebenen Hauptraum T immer ein Polynom q , so dass T gleich Bild $q(\varphi)$ und die Summe aller anderen Haupträume gleich Kern $q(\varphi)$ ist?	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Scheinklausur (Teil B), 14.2.2003, **Ergebnisteil, Gruppe B**

Tragen Sie bei den Aufgaben 6 bis 9 jeweils nur die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. Sie brauchen die Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für jede richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für falsche Antworten gibt es **Null** Punkte.

6	<p>Es sei $\alpha : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung mit der Abbildungsmatrix ${}_C\alpha^B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.</p> <p>Geben Sie das Bild <input style="width: 50px; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"/> der Spalte $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ unter der verpflanzten Abbildung $\alpha' : \mathbb{R}^{4 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 1}$ an.</p> <p style="text-align: right;">(3 Punkte)</p>
7	<p>Wir fassen den Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen als 2-dimensionalen \mathbb{R}-Vektorraum $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ auf. Dann ist die Multiplikation $\psi_\lambda = (z \mapsto z \cdot \lambda \text{ für } z \in \mathbb{C}) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit einer festen Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ offenbar ein Endomorphismus von \mathbb{C}. Berechnen Sie die Matrix ${}_C\psi_\lambda^B = \begin{bmatrix} & \\ \hline & \end{bmatrix}$ bezüglich der Basen $B = (1, i)$ und $C = (\frac{1}{2} + \frac{i}{2}, \frac{1}{2} - \frac{i}{2})$ von $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ für $\lambda = 2 - 3i$.</p> <p style="text-align: right;">(4 Punkte)</p>
8	<p>Der Endomorphismus φ des \mathbb{Q}-Vektorraums V habe bezüglich einer Basis B die Matrix ${}_B\varphi^B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 15 & -8 \end{bmatrix}$. Die Eigenwerte dieser Matrix sind -2 und -3. Bestimmen Sie eine Eigenvektorbasis C von φ und geben Sie die Basiswechselmatrix ${}_B\text{id}^C = \begin{bmatrix} & \\ \hline & \end{bmatrix}$ an.</p> <p style="text-align: right;">(4 Punkte)</p>
9	<p>In einem reellen affinen Raum $(\mathcal{P}, V, *)$ sei ein Dreieck $[A, B, C]$ durch seine beschreibenden Vektoren a, b, c bezüglich eines Ursprungs U gegeben. Es sei δ eine invertierbare lineare Abbildung von V nach V und $\Delta = (U * x \mapsto U * \delta(x))$ die zugehörige Abbildung von \mathcal{P} nach \mathcal{P}. Welchen beschreibenden Vektor hat der Seitenhalbierenden-Schnittpunkt des Bilddreiecks $[\Delta(A), \Delta(B), \Delta(C)]$?</p> <p style="text-align: center;"><input style="width: 200px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/></p> <p style="text-align: right;">(4 Punkte)</p>

Scheinklausur (Teil B), 14.2.2003, **schriftlicher Teil, Gruppe B**

Beantworten Sie die Aufgaben 10 bis 13 schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

10	<p>Gegeben sind die Vektorräume $V = \mathbb{Z}^{1 \times 2}$ und $W = \mathbb{Z}^{2 \times 1}$ über dem Körper $\mathbb{Z} = \{0, 1, 2\}$ sowie die Abbildung $\varphi = ([a, b] \mapsto \begin{bmatrix} a + 2b \\ a - b^3 \end{bmatrix}) : V \rightarrow W$. Ist φ linear? (Antwort mit Beweis.)</p> <p style="text-align: right;">(5 Punkte)</p>
11	<p>Gegeben seien φ-invariante Teilräume $T \leq T' \leq V$ eines Vektorraums V mit Endomorphismus φ. Beweisen Sie für die Minimalpolynome, dass m_T ein Teiler von $m_{T'}$ ist.</p> <p style="text-align: right;">(4 Punkte)</p>
12	<p>Es sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und φ ein Endomorphismus von V. Weiter seien ein Vektor $v \in V$ und sein φ-Erzeugnis $T = \varphi \langle v \rangle$ gegeben. Zeigen Sie: Ist $p(X)$ ein K-Polynom mit $p(\varphi)(v) = 0$, so ist $p(\varphi) _T$ die Nullabbildung.</p> <p style="text-align: right;">(4 Punkte)</p>
13	<p>Es sei τ eine Verschiebung auf dem Vektorraum V und $\varphi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass dann $\alpha := \varphi \circ \tau : V \rightarrow W$ eine affine Vektorabbildung ist.</p> <p style="text-align: right;">(4 Punkte)</p>