

# Test 4 im WS99/00

In allen Aufgaben sei  $K$  ein Körper.

**T1)** Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit Einträgen aus  $\mathbb{F}_{11} = \{0, 1, \dots, 10\}$  ( $x \in \mathbb{F}_{11}$ ):

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & x+1 \\ x+2 & x+3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & 9 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7       -2       6       -44       -13

**T2)** Es seien  $V$  und  $W$   $K$ -Vektorräume mit  $\dim V = 3$ ,  $\dim W = 2$  und  $\varphi : V \rightarrow W$  ein Epimorphismus. Sind die folgenden Aussagen wahr?

- |  |  |
|--|--|
| $\mathcal{B}'[\varphi]_{\mathcal{B}} \in K^{2 \times 3}$ für Basisfolgen $\mathcal{B}$ von $V$ und $\mathcal{B}'$ von $W$                                | <input checked="" type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |
| $\mathcal{B}'[\varphi]_{\mathcal{B}} \in K^{3 \times 2}$ für Basisfolgen $\mathcal{B}$ von $V$ und $\mathcal{B}'$ von $W$                                | <input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\mathcal{B}'[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ für geeignete Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$  | <input checked="" type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |
| $\mathcal{B}'[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ für geeignete Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$  | <input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\mathcal{B}'[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ für geeignete Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ | <input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein |

**T3)** Sei  $\varphi \in \text{End } V$  mit charakteristischem Polynom  $\chi_{\varphi} = (X - 1)^5$  und Minimalpolynom  $\mu_{\varphi} = (X - 1)^3$ ; ferner sei  $\dim \text{Kern}(\varphi - \text{id}_V) = 2$ . Dann ist die Jordansche Normalform von  $\varphi$  (eines ankreuzen!):

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & 0 & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

      X           

**T4)** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $\varphi \in \text{End } V$  und  $\dim V = n < \infty$ . Sind die folgenden Aussagen wahr?

- |   |  |
|---|--|
| $0 \in K$ kann Eigenwert von $\varphi$ sein.                    | <input checked="" type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |
| $\underline{0} \in V$ kann Eigenvektor von $\varphi$ sein.      | <input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi$ kann $n + 1$ Eigenwerte haben.                        | <input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi$ kann $n + 1$ Eigenvektoren haben.                     | <input checked="" type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi$ hat immer einen Eigenwert.                            | <input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| Ist 0 Eigenwert, so ist $\varphi$ die Nullabbildung.            | <input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| Die Summe von Eigenvektoren von $\varphi$ ist auch Eigenvektor. | <input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| Jedes Vielfache eines Eigenvektors ist Eigenvektor.             | <input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein |

**T5)**  $A$  und  $A'$  seien  $n \times n$ -Matrizen mit Einträgen in  $K$ . Sind die folgenden Aussagen wahr?

- |   |  |
|---|--|
| $\chi_A = \chi_{A'} \implies A$ und $A'$ sind ähnlich | <input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\mu_A = \mu_{A'} \implies A$ und $A'$ sind ähnlich   | <input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Rang } A = n \iff \chi_A(0) \neq 0$            | <input checked="" type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Rang } A = n \iff \mu_A(0) \neq 0$             | <input checked="" type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Rang } A = 0 \iff \chi_A = X^n$                | <input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein |

**Auswertung:** Richtige Antwort 1 Punkt, keine Antwort 0 Punkte, falsche Antwort -1 Punkt.