

Aufgaben mit Begründung

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen. Natürlich dürfen Sie Aussagen aus der Vorlesung ohne Beweis benutzen.

Aufgabe 10.

Geben Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über dem endlichen Körper \mathbb{F}_2 an:

$$\begin{array}{rcccccc} & & & x_3 & & + & x_5 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & = & 1 \end{array}$$

Wieviele Lösungen gibt es? (4 Punkte)

Aufgabe 11.

Es sei K ein Körper. Für $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei $p_i \in \text{Abb}(K, K)$ durch $p_i(x) = x^i$ definiert (wobei $p_0(0) := 1$).

- (a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{M} := \{p_0 + p_1, p_0 + p_1 + p_2\}$ linear unabhängig in $\text{Abb}(K, K)$ ist. (2 Punkte)
- (b) Ergänzen Sie \mathcal{M} zu einer Basis von $P_3(K) = \langle \{p_0, p_1, p_2, p_3\} \rangle$. (2 Punkte)
-

Aufgabe 12.

- (a) Gibt es eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{2 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit

$$\text{Kern}(\varphi) = \left\{ \begin{bmatrix} x & x & x \\ y & y & y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$\text{Bild}(\varphi) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\} ?$$

(2 Punkte)

- (b) Gibt es eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit

$$\text{Kern}(\psi) = \left\{ \begin{bmatrix} x & x \\ y & y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$\text{Bild}(\psi) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\} ?$$

(3 Punkte)

Geben Sie jeweils entweder eine solche Abbildung an oder beweisen Sie, dass es keine gibt.

Bitte wenden \rightarrow

Aufgabe 13.

- (a) Ist die Abbildung $f : \mathbb{F}_3 \rightarrow \mathbb{F}_3, x \mapsto x^2 + x$ surjektiv? (2 Punkte)
- (b) Ist die Abbildung $f : \mathbb{F}_3^{2 \times 3} \rightarrow \mathbb{F}_3^{2 \times 3}, X \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X$ surjektiv? (3 Punkte)
-

Aufgabe 14.

Sei K ein Körper, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in V = K^{2 \times 2}$ und $\varphi : V \rightarrow V$ definiert durch $\varphi(X) = AX - XA$ für alle $X \in V$.

- (a) Zeigen Sie, dass φ linear ist. (2 Punkte)
- (b) Geben Sie je eine Basis von $\text{Kern}(\varphi)$ und $\text{Bild}(\varphi)$ an. (3 Punkte)
- (c) Ergänzen Sie eine Basis von $\text{Kern}(\varphi)$ zu einer Basis von V . (2 Punkte)

Ankreuzteil

Dieses Blatt muss abgegeben werden. Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.

Auswertung: Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg.

Die Zahl der Punkte aus dem Ankreuzteil wird durch 3 geteilt und zur Zahl der Punkte aus dem anderen Teil addiert, um die Gesamtpunktzahl der Klausur zu errechnen.

Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

Aufgabe 1. Sei K ein Körper, W ein K -Vektorraum und V_1 und V_2 Teilräume von W . Dann gilt:

$W = \{k \cdot w \mid k \in K \text{ und } w \in W\}$	<input type="checkbox"/>	Ja		<input type="checkbox"/>	Nein
$W = V_1 + V_2$	<input type="checkbox"/>	Ja		<input type="checkbox"/>	Nein
$W \times K = \{w \cdot k \mid k \in K \text{ und } w \in W\}$	<input type="checkbox"/>	Ja		<input type="checkbox"/>	Nein
$V_1 \cap V_2$ ist Teilraum von W	<input type="checkbox"/>	Ja		<input type="checkbox"/>	Nein
$W + V_1 = W + V_2$	<input type="checkbox"/>	Ja		<input type="checkbox"/>	Nein

Aufgabe 2. Es sei K ein Körper, V und W K -Vektorräume und $\varphi : V \rightarrow W$ eine K -lineare Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

Kern(φ) = $\varphi^{-1}(\{0\})$	<input type="checkbox"/>	Ja		<input type="checkbox"/>	Nein
Bild(φ) = $\{w \in W \mid \text{es existiert ein } v \in V \text{ mit } w = \varphi(v)\}$	<input type="checkbox"/>	Ja		<input type="checkbox"/>	Nein
Für $M \subseteq W$ ist $\varphi^{-1}(M) = \{v \in V \mid \text{für alle } w \in M \text{ ist } \varphi(v) = w\}$	<input type="checkbox"/>	Ja		<input type="checkbox"/>	Nein
$\varphi(v \cdot w) = \varphi(v) \cdot \varphi(w)$	<input type="checkbox"/>	Ja		<input type="checkbox"/>	Nein
$\{(v_1, v_2) \in V \times V \mid \varphi(v_1 - v_2) = 0\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf V	<input type="checkbox"/>	Ja		<input type="checkbox"/>	Nein

Aufgabe 3. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\{(x, y, x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ ist Teilraum in \mathbb{R}^3	<input type="checkbox"/>	Ja		<input type="checkbox"/>	Nein
$\{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ist Teilraum in \mathbb{R}^2	<input type="checkbox"/>	Ja		<input type="checkbox"/>	Nein
\emptyset ist Teilraum in \mathbb{R}^2	<input type="checkbox"/>	Ja		<input type="checkbox"/>	Nein
$\{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ist Teilraum in \mathbb{R}^2	<input type="checkbox"/>	Ja		<input type="checkbox"/>	Nein
$\{\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ ist linear}\}$ ist ein Teilraum des \mathbb{R} -Vektorraums $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	<input type="checkbox"/>	Ja		<input type="checkbox"/>	Nein

Aufgabe 4. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\{(1, 0, 1), (1, 2), (0, 1, 0)\}$ ist Basis von \mathbb{R}^3	<input type="checkbox"/>	Ja		<input type="checkbox"/>	Nein
$\{(1, 0, 1), (1, 2, 1), (0, 1, 0)\}$ ist Basis von \mathbb{R}^3	<input type="checkbox"/>	Ja		<input type="checkbox"/>	Nein
$\{(1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$ ist Basis von \mathbb{R}^2	<input type="checkbox"/>	Ja		<input type="checkbox"/>	Nein
$\{(1, 1, 1), (1, 2, 3)\}$ ist Basis von \mathbb{R}^3	<input type="checkbox"/>	Ja		<input type="checkbox"/>	Nein
$\{(1, 2, 3), (0, 2, 0)\}$ ist Basis des Teilraums $\langle (1, 1, 1), (1, 0, 1) \rangle$ von \mathbb{R}^3	<input type="checkbox"/>	Ja		<input type="checkbox"/>	Nein

Bitte wenden →

Aufgabe 5. K sei ein Körper, V ein K -Vektorraum und $X \subseteq V$ eine Teilmenge von V . Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- | | | |
|--|--|--|
| Ist X Basis von V , dann ist X endlich | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| Ist X Basis von V , dann ist X auch Erzeugendensystem von V | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Ist X linear abhängig, dann ist X kein Erzeugendensystem von V | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| Ist X linear unabhängig, dann existiert kein $v \in X$ mit $v \in \langle X \setminus \{v\} \rangle$ | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Wenn ein $v \in V \setminus \langle X \rangle$ existiert, dann ist $X \setminus \{v\}$ keine Basis von V | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

Aufgabe 6. Es sei K ein Körper und alle K^n ($n \in \mathbb{N}$) seien als K -Vektorräume aufgefasst. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

- | | | |
|---|--|--|
| $\varphi : K^2 \rightarrow K^3, (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_2 + x_1, x_1)$ | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : K^2 \rightarrow K, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 - 1) \cdot (x_2 + 1)$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : K \rightarrow K, x \mapsto 1$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : K \rightarrow K^2, x \mapsto (x, x + x)$ | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\varphi : K \rightarrow K, x \mapsto 0$ | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |

Aufgabe 7. Es sei K ein Körper und V und W K -Vektorräume. $\varphi : V \rightarrow W$ und $\psi : V \rightarrow W$ seien zwei lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- | | | |
|---|--|--|
| $\text{Kern}(\varphi + \psi) \supseteq \text{Kern}(\varphi) \cap \text{Kern}(\psi)$ | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Bild}(\varphi + \psi) \subseteq \text{Bild}(\varphi) + \text{Bild}(\psi)$ | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Kern}(\varphi + \psi) = \text{Kern}(\varphi) \cap \text{Kern}(\psi)$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Bild}(\varphi - \psi) \supseteq \text{Bild}(\varphi) + \text{Bild}(\psi)$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| $\text{Kern}(\varphi + \psi) = \text{Kern}(\varphi) + \text{Kern}(\psi)$ | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |

Aufgabe 8. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- | | | |
|--|--|--|
| Jede \mathbb{R} -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{2000} \rightarrow \mathbb{R}^{1999}$ ist surjektiv. | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| Es gibt eine injektive, \mathbb{R} -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{1999} \rightarrow \mathbb{R}^{2000}$. | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Jede \mathbb{R} -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{1999} \rightarrow \mathbb{R}^{2000}$ ist injektiv. | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| Es gibt eine surjektive, \mathbb{R} -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{2000} \rightarrow \mathbb{R}^{1999}$. | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| Es gibt eine surjektive, \mathbb{R} -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{1999} \rightarrow \mathbb{R}^{2000}$. | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |

Aufgabe 9. Welche Aussagen sind richtig? Ein lineares Gleichungssystem über einem Körper

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- | | | |
|---|--|--|
| — heißt homogen, wenn $b_1 = 0$ ist. | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| — ist lösbar, wenn $m = n$ ist. | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |
| — hat einen Lösungsraum der Dimension $n - \text{Rg}[a_{ij}]$, falls $b_1 = \cdots = b_m = 0$ ist. | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| — kann unlösbar sein, wenn $b_1 \neq 0$ ist. | <input checked="" type="checkbox"/> Ja | <input type="checkbox"/> Nein |
| — hat immer die Lösung $x_1 = \cdots = x_n = 0$. | <input type="checkbox"/> Ja | <input checked="" type="checkbox"/> Nein |