Nachholklausur zur LA I (WS 90/91)

Prof. Dr. Pahlings

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Tragen Sie auf das Deckblatt, welches Sie Ihren Lösungen beiheften, Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Übungsgruppenleiters ein. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Zum Bestehen der Klausur müssen mindestens 50 Punkte erreicht werden. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

Wir machen darauf aufmerksam, daß bis zum Ende des auf die Vorlesung folgenden Semesters nicht abgeholte Klausuren (und Übungen) vernichtet werden. Anspruch auf Anrechnen besteht dann nicht mehr.

Aufgabe 1.
Sei $V = P_3(\mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynomfunktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad ≤ 3, und $\varphi : V \to V$ definiert durch

$$\varphi(f)(x) := x \cdot f'(x) - f(x+1), \quad f \in V, x \in \mathbb{R},$$

wobei $f'(x)$ wie üblich die Ableitung von f an der Stelle x bezeichnet.
(a) Zeigen Sie, daß φ linear ist, und bestimmen Sie ${}_B[\varphi]_B$, wobei $B = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ mit $p_i(x) := x^i$ $(x \in \mathbb{R})$ ist.
(b) Berechnen Sie Rang(φ); bestimmen Sie eine Basis für Kern(φ) und ergänzen Sie diese zu einer Basis B' von V.
(c) Berechnen Sie ${}_{B'}[\varphi]_{B'}$. 15 Pkte.

Aufgabe 2.
Für welche $k \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcl} -x_1 & & +(k-3)x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +2x_2 & +6x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & +(k+2)x_2 & +7x_3 & = & 4 \end{array}$$

(a) keine Lösung.
(b) genau eine Lösung.
(c) mehr als eine Lösung. 10 Pkte.

Aufgabe 3.
Seien $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben durch

$$a_{ij} = 1 \text{ für alle } i,j; \quad b_{ij} = \begin{cases} i-1 & \text{, falls } i = j, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie $\det(A+B)$. 10 Pkte.

Aufgabe 4.
Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie:
Genau dann ist Rang(φ) = Rang(φ^2), wenn Bild$(\varphi) \cap$ Kern$(\varphi) = \{0\}$ ist. 10 Pkte.

Aufgabe 5.
Seien $f = X^8 + X^5 + X^3 + X$ und $g = X^2 - X + 1$ Polynome in $\mathbb{R}[X]$.
(a) Dividieren Sie f mit Rest durch g.
(b) Berechnen Sie $f(A)$ für $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 10 Pkte.

Aufgabe 6.
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A, alle Eigenwerte und die Dimensionen der zugehörigen Eigenräume.
(b) Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von A.
(c) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von A. 20 Pkte.

Aufgabe 7.
Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Q}^{2n\times 2n}$ gegeben durch

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{, falls } i+j \text{ gerade,} \\ 0 & \text{, falls } i+j \text{ ungerade.} \end{cases}$$

(a) Sei $f = X^2 + nX \in \mathbb{Q}[X]$. Zeigen Sie: $f(A) = 0$.
(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und die Dimensionen der zugehörigen Eigenräume. Ist A diagonalisierbar? (Begründen Sie Ihre Antwort!)
(c) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von A.
15 Pkte.

Aufgabe 8.
Sei $V = \mathbb{Z}_3^4$ mit Standardbasis (e_1, e_2, e_3, e_4) und U der von $e_1 - e_2 + e_3, e_1 - e_3 - e_4$ erzeugte Teilraum. Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{Z}_3^{m\times 4}$ (für geeignetes m), so daß U die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Gleichungssystems $Ax = \underline{0}$ ist.
10 Pkte.