Aufgabenblatt 1 zur

Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (17. 3. 1997)

Professor Dr. J. Neubüser, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 1.

Welche Elemente des Restklassenrings $\mathbb{Z}_{128} = \mathbb{Z}/128\,\mathbb{Z}$ sind Nullteiler?
Geben Sie nicht eine Liste aller dieser Elemente, sondern eine Beschreibung, die es gestattet, durch Betrachtung einer Zahl $z \in \mathbb{Z}$ sofort zu entscheiden, ob $\overline{z} = 128\,\mathbb{Z} + z$ ein Nullteiler ist oder nicht.
(Mit Begründung.) *3 Punkte*

Aufgabe 2.

Es sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $X \in V$.
Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $W := \operatorname{Hom}(V, V)$ der linearen Abbildungen von V nach V.

(a) Ist $M_1 = \{\varphi \in W \mid X \in \operatorname{Kern} \varphi\}$ ein Teilraum von W?

(b) Ist $M_2 = \{\varphi \in W \mid \langle X \rangle = \operatorname{Kern} \varphi\}$ ein Teilraum von W?

Antwort jeweils mit Begründung. (Quantoren nicht vergessen!) *3 + 3 = 6 Punkte*

Aufgabe 3.

Es sei K ein Körper. Für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei V_n ein n-dimensionaler Vektorraum über K. Wir definieren jeweils auf V_n eine Relation R_n durch

$$R_n = \{\, (X, Y) \in V_n \times V_n \mid (X, Y) \text{ ist linear abhängig} \,\}.$$

(a) Für welche n ist R_n reflexiv, für welche nicht?

(b) Für welche n ist R_n symmetrisch, für welche nicht?

(c) Für welche n ist R_n transitiv, für welche nicht?

Antwort jeweils mit Beweis. (Quantoren nicht vergessen!) *1 + 1 + 2 = 4 Punkte*

Aufgabe 4.

Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ sei der Teilraum $T = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ gegeben. Berechnen Sie eine Basis von V/T.
(Formulierung und Begründung sind wichtig.) *4 Punkte*

Aufgabe 5.

Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ seien zwei Basen $\mathcal{B} = (B_1, B_2)$ und $\mathcal{C} = (C_1, C_2)$ mit der Basiswechselmatrix ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ gegeben. Es sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.
Wir betrachten den durch ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = A$ definierten Endomorphismus φ von V und das durch ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = A$ definierte Skalarprodukt Φ auf V.

(a) Berechnen Sie die Basiswechselmatrix ${}_{\mathcal{C}}id_{\mathcal{B}}$ sowie die Matrizen ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$ und ${}_{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}}$.

(b) Was bedeutet es für die Basisvektoren B_1 und B_2, daß die Komponente $[{}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}}]_{12}$ von ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}}$ (also der Eintrag in der ersten Zeile, zweiten Spalte von ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}}$) gleich 0 ist?

(c) Was bedeutet es für den Basisvektor B_2, daß die Komponente $[{}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}]_{12}$ von ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$ gleich 0 ist?

3 + 1 + 1 = 5 Punkte

Aufgabe 6.

Es sei K ein Körper, $V = K^{2\times 2}$ der Vektorraum der 2×2 Matrizen über K und $\varphi : V \to K$ die Abbildung, die jede Matrix $[a_{ij}]$ aus V auf die Summe $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_{ij}$ ihrer Einträge abbildet.

(a) Zeigen Sie: φ ist ein lineares Funktional von V.

(b) Berechnen Sie eine Basis von Bild φ.

(c) Berechnen Sie eine Basis von Kern φ.

Formulieren Sie das Ergebnis jeweils in einem Schlußsatz. *3 + 2 + 4 = 9 Punkte*

Aufgabenblatt 2 zur

Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (17. 3. 1997)

Professor Dr. J. Neubüser, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 7.

Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung.

> Jedes lösbare inhomogene lineare Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 7 Unbekannten über einem beliebigen Körper hat mehr als 10 Lösungen.

(Ausführliche und vollständige Argumentation ist wichtig.) *5 Punkte*

Aufgabe 8.

Es sei K ein Körper, V ein 7-dimensionaler K-Vektorraum, W ein 3-dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{Hom}\,(V, W)$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung.

> Jede Restklasse von $\mathrm{Kern}\,\varphi$ enthält mehr als 10 Elemente.

(Ausführliche und vollständige Argumentation ist wichtig.) *5 Punkte*

Aufgabe 9.

Invertieren Sie die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit Hilfe des in der Vorlesung vorgestellten Verfahrens. (Sie brauchen dabei nicht anzugeben, welche elementaren Umformungen Sie benutzen. Sie müssen aber am Schluß die Matrix A^{-1} explizit angeben.) *5 Punkte*

Aufgabe 10.

Es sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und φ der durch ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definierte Endomorphismus von $\mathbb{R}^3$.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von φ und ihre Vielfachheiten.

(b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert von φ den zugehörigen Eigenraum.

(c) Berechnen Sie eine Fächerbasis C von $\mathbb{R}^3$ bezüglich φ sowie die zugehörige Abbildungsmatrix ${}_{C}\varphi_{C}$. *3 + 1 + 5 = 9 Punkte*

Aufgabe 11.

Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 3 und $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ eine Basis von V. Berechnen Sie den Annihilator des Teilraums

$$T = \langle\, p_0 + 2p_1 + p_2 + 3p_3,\ 2p_0 + 3p_1 + p_2 + 5p_3 \,\rangle \leq V$$

im Dualraum V^* von V. (Wichtig ist eine ausreichende Begründung und Erläuterung Ihrer Rechnung. Formulieren Sie das Ergebnis in einem Schlußsatz.) *5 Punkte*

Aufgabe 12.

Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ eine Basis von V. Ein Skalarprodukt Φ auf V sei durch die Matrix ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ gegeben.

(a) Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthogonalbasis $\mathcal{C} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ von V bezüglich Φ, und geben Sie die Basiswechselmatrix ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{C}}$ sowie die Matrix ${}_{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}}$ an.

(Es geht in dieser Aufgabe um das Gram-Schmidt-Verfahren. Die Benutzung anderer Verfahren wird nicht gewertet.)

(b) Ist Φ positiv definit? (Antwort mit Begründung.)

(c) Bestimmen Sie Index und Signatur von Φ. (Mit Erläuterung.) *7 + 1 + 2 = 10 Punkte*
