

2. Halbklausur zur Linearen Algebra I (15. 2. 97)

Professor Dr. J. Neubüser, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Von den 9 gegebenen Aufgaben für insgesamt 49 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.

In $V = \mathbb{R}^3$ seien die Teilräume $T_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$ und $T_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$

gegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe des Zassenhaus-Algorithmus eine Basis von $\langle T_1, T_2 \rangle$ und eine Basis von $T_1 \cap T_2$. 6 Punkte

Aufgabe 2.

Es sei V ein K -Vektorraum und $\varphi \in \text{End}(V)$. Beweisen Sie: Ist φ ein Monomorphismus, aber kein Automorphismus von V , so ist $\dim V = \infty$. 4 Punkte

Aufgabe 3.

- Ist jedes lineare Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 10 Unbekannten lösbar? (Antwort mit Beweis)
- Wie viele Elemente kann ein Körper haben, über dem es ein homogenes lineares Gleichungssystem mit genau 64 Lösungen gibt? Geben Sie alle Möglichkeiten an. (Nur aufzählen, ohne Beweis)
- Gibt es ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 10 Unbekannten (über einem geeigneten Körper), das genau 64 Lösungen hat? (Antwort mit Beweis) 4 Punkte

Aufgabe 4.

Es sei π die durch

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$i\pi$	7	8	11	10	9	12	3	2	6	5	1	4

 gegebene Permutation auf der Menge $M = \{1, 2, \dots, 12\}$.

- Schreiben Sie π und π^{-1} jeweils als Produkt ziffernfremder Zykeln.
 - Geben Sie die Bahnen auf M unter π an.
 - Schreiben Sie π als Produkt von Transpositionen.
 - Zeigen Sie, daß man π nicht als Produkt von Dreierzykeln schreiben kann.
 - Berechnen Sie die Ordnung von π .
 - Wie viele Elemente der Gruppe S_{12} haben die gleiche Zykelnstruktur wie π ? (Sie brauchen das Ergebnis nicht auszumultiplizieren, müssen es aber begründen.) 8 Punkte
-

Aufgabe 5.
 Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{4 \times 4}$ mit Hilfe des Entwicklungssatzes. Entwickeln Sie dabei A und alle vorkommenden Unterdeterminanten jeweils nach der ersten Zeile. (Also keine vorherigen elementaren Umformungen und keine Entwicklung nach anderen Zeilen oder Spalten.) 3 Punkte

Aufgabe 6.

Es sei $\mathbb{Z}_2[x]$ der Polynomring über \mathbb{Z}_2 und $P(\mathbb{Z}_2)$ der Ring aller Polynomabbildungen von \mathbb{Z}_2 in \mathbb{Z}_2 , und es sei ε der Homomorphismus von $\mathbb{Z}_2[x]$ auf $P(\mathbb{Z}_2)$, der jedem Polynom

$$f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{Z}_2[x]$$

die durch

$$\bar{f}: k \mapsto a_0 + a_1k + \dots + a_nk^n \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}_2$$

definierte Polynomabbildung $\bar{f} \in P(\mathbb{Z}_2)$ zuordnet. Weiter sei

$$g = x^2 + x \in \mathbb{Z}_2[x] \quad \text{und} \quad G = \{f \cdot g \mid f \in \mathbb{Z}_2[x]\} \subseteq \mathbb{Z}_2[x].$$

Beweisen Sie: Es ist $G = \text{Kern } \varepsilon$ (also gleich $\{f \in \mathbb{Z}_2[x] \mid \varepsilon(f) = 0 \in P(\mathbb{Z}_2)\}$).

Hinweis: Zeigen Sie zuerst $G \subseteq \text{Kern } \varepsilon$ und dann $\text{Kern } \varepsilon \subseteq G$. 9 Punkte

Aufgabe 7.

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$.

- Berechnen Sie die Eigenwerte von A und ihre Vielfachheiten.
- Berechnen Sie zu jedem Eigenwert von A den zugehörigen Eigenraum.
- Berechnen Sie eine Matrix $T \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$, so daß $T^{-1}AT$ Diagonalgestalt hat. 7 Punkte

Aufgabe 8.

Es sei V ein K -Vektorraum, \mathcal{B} eine Basis von V und $T \leq V$. Geben Sie (jeweils ohne Beweis) eine Definition an für

- den Dualraum V^* von V ,
- den Annihilator $\text{An}(T)$ in V^* ,
- die zu \mathcal{B} duale Basis von V^* . 3 Punkte

Aufgabe 9.

Es sei $V = \mathbb{R}^4$ und $T = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\rangle \leq V$. Berechnen Sie den Annihilator von T im Dual-

raum V^* von V . Stellen Sie dabei die Elemente φ aus $\text{An}(T)$ durch ihre Abbildungsmatrizen ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}$ bezüglich der Standardbasen \mathcal{B} von V und \mathcal{C} von \mathbb{R} dar. (Wichtig ist eine ausreichende Erläuterung Ihrer Rechnung.) 5 Punkte