27.3.2006

Vordiplomsklausur zur Linearen Algebra I, WS 05/06

Prof. Dr. G. Hiß

Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt leserlich und in **Blockbuchstaben** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein und unterschreiben Sie.

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Eigenhändige Unterschrift: ______________________________

	Krz	Erg	9	10	11	12	Σ
Punkte							
Nachk.							

Zum Ankreuzteil:

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung: Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg. Wenn Sie bei einer Frage unsicher sind, machen Sie einfach kein Kreuz.
Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

Zum Ergebnisteil:

In diesem Teil müssen Sie Ihre Aussagen **nicht** begründen. Es zählt nur das richtige Ergebnis.

Zu den Aufgaben mit Begründungen:

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen. Natürlich brauchen Sie Aussagen aus der Vorlesung nicht noch einmal zu beweisen, es sei denn, es ist explizit gefordert.

Gruppe A

Vordiplomsklausur, 27.3.2006

Lineare Algebra I, WS 2005/06, Prof. Dr. G. Hiß

Name: ______________________________ **Matrikelnummer:** ____________________

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Sind die folgenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme richtig?	
	Jedes inhomogene lineare Gleichungssystem mit mehr Unbekannten als Gleichungen hat mindestens 2 Lösungen.	☐ Ja ☐ Nein
	Jedes homogene lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mit weniger Unbekannten als Gleichungen hat keine Lösungen.	☐ Ja ☐ Nein
	Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^{m\times 1}$ hat genau dann eine Lösung, wenn b im Spaltenraum von A liegt.	☐ Ja ☐ Nein
2	Es seien V und W K-Vektorräume der Dimension größer oder gleich 3 und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Weiter seien $v_1, v_2, v_3 \in V$. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Wenn (v_1, v_2, v_3) linear abhängig ist, dann ist $(\varphi(v_1), \varphi(v_2), \varphi(v_3))$ auch linear abhängig.	☐ Ja ☐ Nein
	Wenn φ surjektiv ist und $(\varphi(v_1), \varphi(v_2), \varphi(v_3))$ linear unabhängig ist, dann ist auch (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig.	☐ Ja ☐ Nein
	Wenn φ injektiv ist und (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig ist, dann ist auch $(\varphi(v_1), \varphi(v_2), \varphi(v_3))$ linear unabhängig.	☐ Ja ☐ Nein
3	Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ und $A, B, C \in K^{n\times n}$.	
	Es gilt $\det(A - B) = \det(A) - \det(B) + \det(AB)$.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $\det(ABC) \neq 0$, dann sind A und B invertierbar und $C = B^{-1}A^{-1}$.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist A invertierbar, so gilt $\det(A + A^t) \neq 0$.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist A invertierbar, so ist $\mathrm{Spur}(A) \neq 0$.	☐ Ja ☐ Nein
4	Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.	
	Ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert a und w ein Eigenvektor von A zum Eigenwert b und ist $a \neq b$, dann ist $v + w$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $a + b$.	☐ Ja ☐ Nein
	B hat höchstens n verschiedene Eigenwerte.	☐ Ja ☐ Nein
	Hat A paarweise verschiedene Eigenwerte $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und ist $B = A^3$, dann ist B diagonalisierbar.	☐ Ja ☐ Nein
5	Es sei K ein Körper, $A \in K^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ und χ_A das charakteristische Polynom von A und μ_A das Minimalpolynom von A. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	A ist genau dann diagonalisierbar, wenn μ_A in Linearfaktoren zerfällt.	☐ Ja ☐ Nein
	Wenn A diagonalisierbar ist, dann zerfällt χ_A in Linearfaktoren.	☐ Ja ☐ Nein
	Falls $f \in K[X]$ ein Polynom mit $\mu_A \vert f$ ist (d.h. μ_A ist ein Teiler von f), dann ist $f(A) = 0$ (Nullmatrix).	☐ Ja ☐ Nein

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

6 Es sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit zwei Elementen und V der $\mathbb{F}_2$-Vektorraum

$$V := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{F}_2 \right\} \leq \mathbb{F}_2^{2\times 2}.$$

Weiter sei die lineare Abbildung $\varphi : V \to \mathbb{F}_2^{2\times 2}, X \mapsto AXB$ gegeben, wobei $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(\varphi)$ und eine Basis von $\mathrm{Bild}(\varphi)$.

$\mathrm{Kern}(\varphi) =$ *(3 Punkte)*

Basis von $\mathrm{Bild}(\varphi) =$ *(3 Punkte)*

7 Es sei $M \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ die folgende Matrix:

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie eine Basis von $\mathbb{Q}^{3\times 1}$, die aus Eigenvektoren von M besteht.

Eigenvektorbasis: *(6 Punkte)*

8 Es sei β die folgende Bilinearform auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{1\times 3}$:

$$\beta : \mathbb{R}^{1\times 3} \times \mathbb{R}^{1\times 3} \to \mathbb{R}, \beta([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 + x_2y_1.$$

Berechnen Sie die Gram-Matrix von β bezüglich der Basis $\mathcal{B} := ([1, 1], [1, -1])$.

$M_{\mathcal{B}}(\beta)$ = *(4 Punkte)*

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.

9 Es seien K ein Körper, V und W Vektorräume über K und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Weiter seien $v_1, v_2 \in V$ mit $v_1 \neq v_2$ und $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) \neq 0$. Zeigen Sie, dass (v_1, v_2) linear unabhängig ist. *(4 Punkte)*

10 Es seien K ein Körper, V und W Vektorräume über K der Dimension n. Zeigen Sie, dass jede injektive lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ auch surjektiv ist. *(4 Punkte)*

11 Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **schiefsymmetrisch**, wenn $A^t = -A$ ist. Zeigen Sie, dass jede $(n\times n)$-Matrix über $\mathbb{R}$ die Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix ist. *(4 Punkte)*

12 Es sei K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$. Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathrm{Bild}(\varphi) = \mathrm{Kern}(\varphi)$, dann ist n gerade. *(3 Punkte)*

(b) Ist n gerade, dann gibt es ein $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $\mathrm{Bild}(\varphi) = \mathrm{Kern}(\varphi)$. *(3 Punkte)*

Gruppe B

Vordiplomsklausur, 27.3.2006

Lineare Algebra I, WS 2005/06, Prof. Dr. G. Hiß

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Es sei K ein Körper, $A \in K^{n \times n}$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ und χ_A das charakteristische Polynom von A und μ_A das Minimalpolynom von A. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Wenn A diagonalisierbar ist, dann zerfällt χ_A in Linearfaktoren.	☐ Ja ☐ Nein
	Falls $f \in K[X]$ ein Polynom mit $\mu_A \| f$ ist (d.h. μ_A ist ein Teiler von f), dann ist $f(A) = 0$ (Nullmatrix).	☐ Ja ☐ Nein
	A ist genau dann diagonalisierbar, wenn μ_A in Linearfaktoren zerfällt.	☐ Ja ☐ Nein
2	Sind die folgenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme richtig?	
	Jedes inhomogene lineare Gleichungssystem mit mehr Unbekannten als Gleichungen hat mindestens 2 Lösungen.	☐ Ja ☐ Nein
	Jedes homogene lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mit weniger Unbekannten als Gleichungen hat keine Lösungen.	☐ Ja ☐ Nein
	Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^{m \times 1}$ hat genau dann eine Lösung, wenn b im Spaltenraum von A liegt.	☐ Ja ☐ Nein
3	Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ und $A, B, C \in K^{n \times n}$.	
	Es gilt $\det(A - B) = \det(A) - \det(B) + \det(AB)$.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $\det(ABC) \neq 0$, dann sind A und B invertierbar und $C = B^{-1}A^{-1}$.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist A invertierbar, so ist $\mathrm{Spur}(A) \neq 0$.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist A invertierbar, so gilt $\det(A + A^t) \neq 0$.	☐ Ja ☐ Nein
4	Es seien V und W K-Vektorräume der Dimension größer oder gleich 3 und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Weiter seien $v_1, v_2, v_3 \in V$. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Wenn φ surjektiv ist und $(\varphi(v_1), \varphi(v_2), \varphi(v_3))$ linear unabhängig ist, dann ist auch (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig.	☐ Ja ☐ Nein
	Wenn (v_1, v_2, v_3) linear abhängig ist, dann ist $(\varphi(v_1), \varphi(v_2), \varphi(v_3))$ auch linear abhängig.	☐ Ja ☐ Nein
	Wenn φ injektiv ist und (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig ist, dann ist auch $(\varphi(v_1), \varphi(v_2), \varphi(v_3))$ linear unabhängig.	☐ Ja ☐ Nein
5	Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.	
	Ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert a und w ein Eigenvektor von A zum Eigenwert b und ist $a \neq b$, dann ist $v + w$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $a + b$.	☐ Ja ☐ Nein
	Hat A paarweise verschiedene Eigenwerte $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und ist $B = A^3$, dann ist B diagonalisierbar.	☐ Ja ☐ Nein
	B hat höchstens n verschiedene Eigenwerte.	☐ Ja ☐ Nein

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

6 Es sei β die folgende Bilinearform auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{1\times 3}$:

$$\beta : \mathbb{R}^{1\times 3} \times \mathbb{R}^{1\times 3} \to \mathbb{R}, \beta([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 + x_2y_1.$$

Berechnen Sie die Gram-Matrix von β bezüglich der Basis $\mathcal{B} := ([1, 1], [1, -1])$.

$M_{\mathcal{B}}(\beta)$ =

(4 Punkte)

7 Es sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit zwei Elementen und V der $\mathbb{F}_2$-Vektorraum

$$V := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{F}_2 \right\} \leq \mathbb{F}_2^{2\times 2}.$$

Weiter sei die lineare Abbildung $\varphi : V \to \mathbb{F}_2^{2\times 2}, X \mapsto AXB$ gegeben, wobei $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(\varphi)$ und eine Basis von $\mathrm{Bild}(\varphi)$.

$\mathrm{Kern}(\varphi) =$

(3 Punkte)

Basis von $\mathrm{Bild}(\varphi) =$

(3 Punkte)

8 Es sei $M \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ die folgende Matrix:

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie eine Basis von $\mathbb{Q}^{3\times 1}$, die aus Eigenvektoren von M besteht.

Eigenvektorbasis:

(6 Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.

9 Es seien K ein Körper, V und W Vektorräume über K und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Weiter seien $v_1, v_2 \in V$ mit $v_1 \neq v_2$ und $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) \neq 0$. Zeigen Sie, dass (v_1, v_2) linear unabhängig ist. *(4 Punkte)*

10 Es seien K ein Körper, V und W Vektorräume über K der Dimension n. Zeigen Sie, dass jede injektive lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ auch surjektiv ist. *(4 Punkte)*

11 Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **schiefsymmetrisch**, wenn $A^t = -A$ ist. Zeigen Sie, dass jede $(n\times n)$-Matrix über $\mathbb{R}$ die Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix ist. *(4 Punkte)*

12 Es sei K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$. Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathrm{Bild}(\varphi) = \mathrm{Kern}(\varphi)$, dann ist n gerade. *(3 Punkte)*

(b) Ist n gerade, dann gibt es ein $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $\mathrm{Bild}(\varphi) = \mathrm{Kern}(\varphi)$. *(3 Punkte)*