6.3.2006

Scheinklausur zur Linearen Algebra I, WS 05/06, Nachholklausur

Prof. Dr. G. Hiß

Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt leserlich und in **Blockbuchstaben** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein und unterschreiben Sie.

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Eigenhändige Unterschrift: ______________________________

	Krz	Erg	8	9	10	11	Σ
Punkte							
Nachk.							

Zum Ankreuzteil:

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung: Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg. Wenn Sie bei einer Frage unsicher sind, machen Sie einfach kein Kreuz.
Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

Zum Ergebnisteil:

In diesem Teil müssen Sie Ihre Aussagen **nicht** begründen. Es zählt nur das richtige Ergebnis.

Zu den Aufgaben mit Begründungen:

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen. Natürlich brauchen Sie Aussagen aus der Vorlesung nicht noch einmal zu beweisen, es sei denn, es ist explizit gefordert.

Gruppe A

Nachholklausur, 6.3.2006

Lineare Algebra I, WS 2005/06, Prof. Dr. G. Hiß

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Sind die folgenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme richtig?	
	Jedes homogene lineare Gleichungssystem mit mehr Unbekannten als Gleichungen hat mindestens 2 Lösungen.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
	Jedes inhomogene lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mit weniger Unbekannten als Gleichungen hat keine Lösungen.	☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein
	Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^{m\times 1}$ hat genau dann eine Lösung, wenn b im Spaltenraum von A liegt.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
2	Es seien K ein Körper und $\varphi : V \to W$ und $\psi : W \to V$ lineare Abbildungen zwischen den K-Vektorräumen V und W. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr?	
	Bild $\psi \subseteq$ Bild $\psi \circ \varphi$	☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein
	Kern $\varphi \subseteq$ Kern $\psi \circ \varphi$	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
	Bild $\psi \circ \varphi \subseteq$ Bild $\varphi \circ \psi$	☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein
	Kern $\varphi \circ \psi \circ \varphi =$ Kern φ	☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein
3	Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ und $A, B, C \in K^{n\times n}$.	
	Es gilt $\det(A - B) = \det(A) - \det(B) + \det(AB)$.	☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein
	Ist $\det(AB) = 1$, dann ist A invertierbar und $B = A^{-1}$.	☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein
	Ist A invertierbar, so gilt $\det(A^2) \neq 0$.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
	Für $a \in K$ ist $\det(aA) = a^n \det(A)$.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
4	Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.	
	Ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert a und ein Eigenvektor von B zum Eigenwert b, dann ist v ein Eigenvektor von AB zum Eigenwert $a \cdot b$.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
	Falls n gerade ist, so hat B mindestens einen Eigenvektor.	☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein
	Hat A paarweise verschiedene Eigenwerte $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und ist $AB = BA$, dann ist B diagonalisierbar.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
5	Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung zwischen zwei nicht-leeren Mengen M und N. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Wenn f keine leeren Fasern hat, dann ist f surjektiv.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
	Wenn jede Faser genau ein Element hat, dann ist f bijektiv.	$\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein
	f ist genau dann bijektiv, wenn jede Faser höchstens ein Element hat.	☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

6 Es sei $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ der Körper mit 2 Elementen. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{F}_2^{5\times 1}$ mit $Ax = b$, wobei $A \in \mathbb{F}_2^{4\times 5}$ und $b \in \mathbb{F}_2^{4\times 1}$ die folgenden sind: *(6 Punkte)*

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ergebnis: $\boxed{}$

7 Berechnen Sie die Determinante, das charakteristische Polynom χ_A und einen Eigenvektor v der folgenden Matrix $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -9 & 0 \\ 5 & -11 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = \boxed{}$ *(2 Punkte)*

$\chi_A = \boxed{}$ *(2 Punkte)*

$v^t = \boxed{}$ *(3 Punkte)*

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

8 Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Matrix, für die $A^3 + A^2 + A + E_3 = 0$ ist, wobei E_3 die 3×3-Einheitsmatrix ist.

(a) Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom μ_A von A ein Teiler von $X^4 - 1$ ist. *(2 Punkte)*

(b) Es sei zusätzlich $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Was ist dann A^{2006}? *(2 Punkte)*

9 Es seien K ein Körper, V und W K-Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Zeigen Sie: Sind $v, w \in V$ und ist $(\varphi(v), \varphi(w))$ linear unabhängig, dann ist (v, w) linear unabhängig. *(4 Punkte)*

10 Es seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $X, Y \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ zwei Matrizen. Zeigen Sie, dass die Menge $\{A \in \mathbb{Q}^{n\times n} \mid AX = YA\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{Q}^{n\times n}$ ist. *(4 Punkte)*

11 Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ und $(\ ,\ ) : \mathbb{C}^{n\times 1} \times \mathbb{C}^{n\times 1} \to \mathbb{C}$ eine beliebige Sesquilinearform auf $\mathbb{C}^{n\times 1}$. Weiter sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\varphi_A : \mathbb{C}^{n\times 1} \to \mathbb{C}^{n\times 1}, v \mapsto Av$. Es gelte $(Av, w) = (v, Aw)$ für alle $v, w \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ (das heißt, φ_A ist selbstadjungiert bezüglich $(\ ,\ )$). Sei $v \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ ein Eigenvektor von φ_A zum Eigenwert a und $w \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ ein Eigenvektor von φ_A zum Eigenwert b mit $a \neq \bar{b}$.
Zeigen Sie, dass $(v, w) = 0$ ist. *(4 Punkte)*

Gruppe B

Nachholklausur, 6.3.2006

Lineare Algebra I, WS 2005/06, Prof. Dr. G. Hiß

Name: ______________________________ **Matrikelnummer:** ____________________

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung zwischen zwei nicht-leeren Mengen M und N. Sind die folgenden Aussagen richtig?		
	f ist genau dann bijektiv, wenn jede Faser höchstens ein Element hat.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
	Wenn jede Faser genau ein Element hat, dann ist f bijektiv.	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
	Wenn f keine leeren Fasern hat, dann ist f surjektiv.	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
2	Sind die folgenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme richtig?		
	Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^{m\times 1}$ hat genau dann eine Lösung, wenn b im Spaltenraum von A liegt.	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
	Jedes inhomogene lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mit weniger Unbekannten als Gleichungen hat keine Lösungen.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
	Jedes homogene lineare Gleichungssystem mit mehr Unbekannten als Gleichungen hat mindestens 2 Lösungen.	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
3	Es seien K ein Körper und $\varphi : V \to W$ und $\psi : W \to V$ lineare Abbildungen zwischen den K-Vektorräumen V und W. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr?		
	Bild $\psi \subseteq$ Bild $\psi \circ \varphi$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
	Kern $\varphi \subseteq$ Kern $\psi \circ \varphi$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
	Bild $\psi \circ \varphi \subseteq$ Bild $\varphi \circ \psi$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
	Kern $\varphi \circ \psi \circ \varphi =$ Kern φ	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
4	Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ und $A, B, C \in K^{n\times n}$.		
	Ist A invertierbar, so gilt $\det(A^2) \neq 0$.	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
	Ist $\det(AB) = 1$, dann ist A invertierbar und $B = A^{-1}$.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
	Für $a \in K$ ist $\det(aA) = a^n \det(A)$.	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
	Es gilt $\det(A - B) = \det(A) - \det(B) + \det(AB)$.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
5	Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.		
	Ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert a und ein Eigenvektor von B zum Eigenwert b, dann ist v ein Eigenvektor von AB zum Eigenwert $a \cdot b$.	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
	Hat A paarweise verschiedene Eigenwerte $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und ist $AB = BA$, dann ist B diagonalisierbar.	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
	Falls n gerade ist, so hat B mindestens einen Eigenvektor.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

6 Berechnen Sie die Determinante, das charakteristische Polynom χ_A und einen Eigenvektor v der folgenden Matrix $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -9 & 0 \\ 5 & -11 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = \boxed{}$ *(2 Punkte)*

$\chi_A = \boxed{}$ *(2 Punkte)*

$v^t = \boxed{}$ *(3 Punkte)*

7 Es sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit 2 Elementen. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{F}_2^{5\times 1}$ mit $Ax = b$, wobei $A \in \mathbb{F}_2^{4\times 5}$ und $b \in \mathbb{F}_2^{4\times 1}$ die folgenden sind: *(6 Punkte)*

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ergebnis: $\boxed{}$

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

8 Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Matrix, für die $A^3 + A^2 + A + E_3 = 0$ ist, wobei E_3 die 3×3-Einheitsmatrix ist.

(a) Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom μ_A von A ein Teiler von $X^4 - 1$ ist. *(2 Punkte)*

(b) Es sei zusätzlich $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Was ist dann A^{2006}? *(2 Punkte)*

9 Es seien K ein Körper, V und W K-Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Zeigen Sie: Sind $v, w \in V$ und ist $(\varphi(v), \varphi(w))$ linear unabhängig, dann ist (v, w) linear unabhängig. *(4 Punkte)*

10 Es seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $X, Y \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ zwei Matrizen. Zeigen Sie, dass die Menge $\{A \in \mathbb{Q}^{n\times n} \mid AX = YA\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{Q}^{n\times n}$ ist. *(4 Punkte)*

11 Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ und $(\ ,\ ) : \mathbb{C}^{n\times 1} \times \mathbb{C}^{n\times 1} \to \mathbb{C}$ eine beliebige Sesquilinearform auf $\mathbb{C}^{n\times 1}$. Weiter sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\varphi_A : \mathbb{C}^{n\times 1} \to \mathbb{C}^{n\times 1}, v \mapsto Av$. Es gelte $(Av, w) = (v, Aw)$ für alle $v, w \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ (das heißt, φ_A ist selbstadjungiert bezüglich $(\ ,\ )$). Sei $v \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ ein Eigenvektor von φ_A zum Eigenwert a und $w \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ ein Eigenvektor von φ_A zum Eigenwert b mit $a \neq \bar{b}$.
Zeigen Sie, dass $(v, w) = 0$ ist. *(4 Punkte)*