NAME ______________________________

MATRIKELNUMMER ______________________________

Prof. Dr. Eva Zerz WS 2006/07

Mathematische Grundlagen
Klausur am 29.3.2007

- **Für jede Aufgabe ein neues Blatt verwenden**
- **Name, Matrikelnummer, Aufgabennummer auf jedes Blatt**
- Notfalls Zusatzblätter anfügen, diese wie oben beschriften, Vermerk aufs Originalblatt (aber nie Antworten zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt)
- Nicht mit Rot schreiben
- Es gibt **6 Aufgaben** und insgesamt **42 Punkte**.
  Für Ergebnisse ohne erkennbaren Rechenweg gibt es keine Punkte.

Aufgabe	Punkte	
1	9	
2	5	
3	9	
4	5	
5	7	
6	7	

Viel Glück!

1. (9=3+3+3 Punkte)

   (a) Sei $n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass n^2 genau dann durch 5 teilbar ist, wenn n durch 5 teilbar ist.

   (b) Zeigen Sie, dass $\sqrt{5}$ irrational ist.

   (c) Die Menge $K = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ist bezüglich der Addition und Multiplikation reeller Zahlen ein kommutativer Ring (**das brauchen Sie nicht zu zeigen, es gibt dafür auch keine Punkte!**). Zeigen Sie, dass K ein Körper ist.

2. (5 Punkte) Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl x, für die

$$x \bmod 56 = 29 \quad \text{und} \quad x \bmod 57 = 34$$

   gilt. Welches ist die zweitkleinste natürliche Zahl mit diesen Eigenschaften?

3. (9 Punkte) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \lambda+1 \\ \lambda+2 & \lambda+9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Für welche λ hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei

$$b = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$$

keine / genau eine / mehrere Lösung(en) $x \in \mathbb{R}^{2\times 1}$?

4. (5 Punkte) Wieviele Äquivalenzrelationen gibt es auf einer Menge mit 4 Elementen?

5. (7=4+3 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring, sei $0 \in R$ das neutrale Element bezüglich der Addition und $1 \in R$ das neutrale Element bezüglich der Multiplikation. Es gelte

$$1 + 1 + 1 = 0.$$

Betrachten wir $f : R \to R$, $x \mapsto x^3 := x \cdot x \cdot x$. Zeigen Sie:

(a) f ist ein Ringhomomorphismus.

(b) Ist R ein Integritätsbereich, so ist f injektiv.

6. (7 Punkte) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit

$$2z^4 + 5z^3 + 15z^2 + 17z + 10 = 0 \quad \text{und} \quad 2z^3 + 13z^2 + 17z + 10 = 0.$$

(Hinweis: Bei richtiger Rechnung ergibt sich $2z^2 + 3z + 2$ als ggT der beiden Polynome; für volle Punkte bitte alle Rechenschritte auf dem Weg dahin detailliert angeben.)