Prof. Dr. Eva Zerz WS 2006/07

Mathematische Grundlagen
Klausur am 9.3.2007 – Gruppe B

- **Für jede Aufgabe ein neues Blatt verwenden**
- **Name, Matrikelnr., Gruppe (A/B), Aufgabennr. auf jedes Blatt**
- Notfalls Zusatzblätter anfügen, diese wie oben beschriften, Vermerk aufs Originalblatt (aber nie Antworten zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt)
- Nicht mit Rot schreiben
- Es gibt **6 Aufgaben** und insgesamt **48 Punkte**.
  Für Ergebnisse ohne erkennbaren Rechenweg gibt es keine Punkte.

Aufgabe	Punkte	
1	8	
2	8	
3	9	
4	10	
5	6	
6	7	

Viel Glück!

1. (8=1+3+3+1 Punkte)

   (a) Begründen Sie (kurz, unter Angabe der relevanten Sätze aus der Vorlesung), warum $\mathbb{R}[x]$ einen Quotientenkörper besitzt.

   (b) Bestimmen Sie eine gekürzte Darstellung des Elementes
   $$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 5x + 2}{x^3 - 5x^2 + 7x - 2}$$
   dieses Quotientenkörpers.

   (c) Bestimmen Sie die größtmögliche Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ so, dass $D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ eine Funktion ist, und untersuchen Sie diese auf Injektivität und Surjektivität.

   (d) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

2. (8=2+2+2+2 Punkte) Berechnen Sie

   (a) $\mathrm{Im}((1+i)^{17})$

   (b) eine rationale Zahl x mit $|x - \sqrt{3}| < 0.01$ (Hinweis: $\sqrt{3} = 1.7320508\ldots$)

   (c) die Zifferndarstellung von 2007 im Ternärsystem ($b = 3$)

   (d) den größten gemeinsamen Teiler von 197213 und 190747.

3. (9=3+3+3 Punkte)

   (a) Sei $G = \{e, a, b\}$ eine Gruppe mit 3 Elementen und neutralem Element e. Bestimmen Sie $x \star y$ für alle $x, y \in G$.

   (b) Sei G eine Gruppe mit n Elementen und neutralem Element e. Zeigen Sie, dass für alle $x \in G$ gilt: $x^n = e$.

   (c) Benutzen Sie (b), um $99^{100} \bmod 101$ zu berechnen.
   (Hinweis: 101 ist eine Primzahl.)

4. (10=4+3+3 Punkte)

   (a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn A durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix I_n übergeführt werden kann.

   (b) Verwenden Sie (a) zur Bestimmung der Inversen von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

   (c) Schreiben Sie die Permutationsmatrix

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

   als Produkt von Spaltenvertauschungsmatrizen.

5. (6=3+3 Punkte) Sei K ein Körper und seien $m, n \in \mathbb{N}$. Für $A, B \in K^{m\times n}$ definiert man

$$A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad \exists U \in K^{m\times m}, V \in K^{n\times n} : U, V \text{ invertierbar und } B = UAV.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $K^{m\times n}$ ist.

   (b) Zeigen Sie, dass $|K^{m\times n}/\!\sim| \leq \min\{m, n\} + 1$.

6. (7=4+3 Punkte)

   (a) Auf $\mathbb{N}^2$ definiert man eine totale Ordnung (das brauchen Sie nicht zu beweisen!) durch

$$(m, n) \preceq (p, q) \quad \Leftrightarrow \quad n \leq q \text{ und } (n = q \Rightarrow m \leq p),$$

   wobei $\leq$ die natürliche Ordnung auf $\mathbb{N}$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass $\preceq$ eine Wohlordnung ist.

   (b) Sei $\preceq$ eine totale Ordnung auf einer Menge M und $\prec$ die zugehörige strikte Ordnung. Zeigen Sie, dass die Bedingung

$$\forall x \in M : \{y \in M \mid y \prec x\} \text{ endlich}$$

   hinreichend, aber nicht notwendig dafür ist, dass $\preceq$ eine Wohlordnung ist.