26. März 2008

Wiederholungsklausur
Mathematische Grundlagen WS 08/09
Prof. Dr. Gabriele Nebe

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*
Es seien A und B mathematische Aussagen. Zeigen Sie:

$$(A \Leftrightarrow B) \iff \left(((\neg A) \vee B) \wedge (A \vee (\neg B)) \right).$$

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*
Es sei $M := \{-1,4,1,1,-1,4,4,-4,-1\}$ und $N := \{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}, |n| \leq 2\}$. Bestimmen Sie

$$|M|, \quad |N|, \quad M \setminus N, \quad N \setminus M, \quad \mathrm{Pot}(M \cap N), \quad |\mathrm{Pot}(M \cup N)|.$$

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*
In einer Urne befinden sich n Kugeln, von 1 bis n durchnummeriert. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 Kugeln aus der Urne zu ziehen, und zwar

a) ohne Zurücklegen und unter Berücksichtigung der Reihenfolge, wobei $n = 5$?

b) ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge, wobei $n = 6$?

c) mit Zurücklegen und unter Berücksichtigung der Reihenfolge, wobei $n = 2$?

d) mit Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge, wobei $n = 3$?

Aufgabe 4 *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \underline{5} \to \underline{3},\ x \mapsto 3 - |x - 3|$$

wohldefiniert und surjetiv ist, und geben Sie alle Rechtsinversen an.

Aufgabe 5 *(4 Punkte)*
Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ durch vollständige Induktion:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!} = 1 - \frac{1}{n!}.$$

Aufgabe 6 *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass die folgende Relation auf $\mathbb{Z}$ eine Äquivalenzrelation ist, und geben Sie die Äquivalenzklassen einzeln an (mit Begründung):

$$R := \{ (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 - y^2 \text{ ist durch 3 teilbar } \}.$$

Aufgabe 7 *(4 Punkte)*
Berechnen Sie in $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$ und stellen Sie die Ergebnisse mit Hilfe von Vertretern aus der Menge $\{0\} \cup \underline{25}$ dar:

$$[270] + [50], \quad [125] \cdot [31], \quad [3]^{2009}, \quad [3]^{-1}.$$

Aufgabe 8 *(4 Punkte)*
Es seien $f := X^4 + X + 1, g := X^3 + X^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$. Berechnen Sie den $\mathrm{ggT}(f,g)$ sowie $a,b \in \mathbb{F}_2[X]$ mit $af + bg = \mathrm{ggT}(f,g)$.

Aufgabe 9 *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie zu $z := \dfrac{2\sqrt{6}-i}{\sqrt{3}+i\sqrt{2}}$ die Werte $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ und $|z|$.

Aufgabe 10 *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass die komplexe Konjugation $\kappa : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \bar{z}$, ein Ringisomorphismus ist.