5. März 2010

Klausur Mathematische Grundlagen WS 09/10

Prof. Dr. Gerhard Hiß

Denken Sie daran, alle Ihre Behauptungen ausreichend zu begründen und Rechenwege nachvollziehbar zu dokumentieren.

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Es seien A und B mathematische Aussagen. Zeigen Sie:

$$[(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg B] \quad \Rightarrow \quad \neg(A \wedge B).$$

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Es seien $M := \{1,3,-1,3,1,-3,-1,1,3,-1\}$ und $N := \{n \in \mathbb{Z} \mid n(n-1) < 10\}$. Bestimmen Sie

$$|M|, \quad |N|, \quad M \cup N, \quad M \cap N, \quad M \setminus N, \quad N \setminus M, \quad (M \setminus N) \times (N \setminus M), \quad \mathrm{Pot}(M \setminus N).$$

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Es sei M eine nicht-leere Menge. Für jede Teilmenge $T \subseteq M$ definieren wir die *charakteristische Funktion*

$$\chi_T : M \to \{0,1\}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in T, \\ 0 & \text{für } x \notin T. \end{cases}$$

Zeigen Sie die Bijektivität der Abbildung

$$\chi : \mathrm{Pot}(M) \to \{f : M \to \{0,1\}\}, \quad T \mapsto \chi_T.$$

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (k+2)(k-1) \quad = \quad \frac{1}{3} n(n-1)(n+4).$$

Aufgabe 5. *(4 Punkte)*
Prüfen Sie, ob $\overline{119}$ in $\mathbb{Z}/299\mathbb{Z}$ invertierbar ist, und geben Sie gegebenenfalls das Inverse an (mit einem Vertreter aus $\{0\} \cup \underline{298}$).

Aufgabe 6. *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über dem Körper $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0,1\}$.

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 7. *(4 Punkte)*
Es sei K ein Körper. Für $(a,b) \in K \times K$ definieren wir

$$f_{a,b} : K \to K, \quad x \mapsto ax + b.$$

Weiter sei $M := \{ f_{a,b} \mid (a,b) \in K \times K \}$ die Menge aller solcher Abbildungen. Zeigen Sie, dass durch die Komposition von Abbildungen $\circ$ eine Verknüpfung auf der Menge M gegeben ist, und prüfen Sie, ob M ein Monoid ist. Prüfen Sie außerdem, ob $\circ$ eine kommutative Verknüpfung auf M ist.

Aufgabe 8. *(4 Punkte)*
Für $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definieren wir

$$(a,b) \preceq (c,d) :\Longleftrightarrow a \leq c \,\wedge\, b \geq d.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \preceq)$ eine geordnete Menge ist. Prüfen Sie außerdem, ob $\preceq$ eine Totalordnung auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 9. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass

$$R := \{(z,w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid z - w \in \mathbb{R}\}$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{C}$ ist, beschreiben Sie die Äquivalenzklassen und bestimmen Sie ein Vertretersystem.

Aufgabe 10. *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie das multiplikative Inverse von

$$\frac{3\sqrt{3} + i \cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{6} - i}.$$