Klausur zur Linearen Algebra II (4. 7. 97)

Professor Dr. J. Neubüser, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Von den 12 gegebenen Aufgaben für insgesamt 103 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 50 Punkte notwendig. Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Viel Erfolg!

Aufgabe 1.

Es sei $V = \mathbb{R}^3$, $B = (B_1, B_2, B_3)$ die Standardbasis von V und $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V)$ mit

$$_B\varphi_B = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Jordan-Normalform von φ.

(b) Bestimmen Sie eine Basis C von V, so daß $_C\varphi_C$ in Jordan-Normalform ist.

Hinweis: Die Eigenwerte von φ sind ganzzahlig. *5 + 7 = 12 Punkte*

Aufgabe 2.

Es sei $K = \mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ der Körper mit fünf Elementen. Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler d mit führendem Koeffizienten 1 der Polynome

$$f = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2 \quad \text{und} \quad g = x^3 + 4x^2 + 2$$

aus $K[x]$ sowie Polynome a und b mit $d = f \cdot a + g \cdot b$. *8 Punkte*

Aufgabe 3.

Es sei $V = \mathbb{F}_2^3$ und B die Standardbasis von V, und es sei $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V)$ gegeben durch

$$_B\varphi_B = A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie das Minimalpolynom m_φ ohne Benutzung des charakteristischen Polynoms

(a) direkt mit Hilfe der Definition, (b) mit Hilfe von Ordnungspolynomen.

Erläutern Sie jeweils Ihre Rechnung. *4 + 4 = 8 Punkte*

Aufgabe 4.

Es sei V ein 11-dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V)$ mit charakteristischem Polynom $p_\varphi(x) = (x - c)^{11}$ für ein $c \in K$. Die Jordan-Normalform von φ enthalte zwei 1-dimensionale und je ein 2-dimensionales, ein 3-dimensionales und ein 4-dimensionales Jordankästchen. Weiter sei $\psi = \varphi - c \cdot id$ und

$$0 < \mathrm{Kern}(\psi) < \mathrm{Kern}(\psi^2) < \ldots < \mathrm{Kern}(\psi^k) = \mathrm{Kern}(\psi^{k+1}).$$

Bestimmen Sie die Dimensionen von $\mathrm{Kern}(\psi^i)$. (Mit Erläuterung.) *7 Punkte*

Aufgabe 5.

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$. Berechnen Sie mit Hilfe des Elementarteileralgorithmus zwei invertierbare (ganzzahlige) Matrizen P und Q aus $\mathbb{Z}^{2\times 2}$, so daß $P \cdot A \cdot Q$ von der Form $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ mit $a, b \geq 0$ und $a \mid b$ ist. (Erläutern Sie Ihre Rechnung.) *8 Punkte*

Aufgabe 6.

(a) Geben Sie die verschiedenen Jordan-Normalformen J_i von 4×4-Matrizen über $\mathbb{R}$ an, deren charakteristisches Polynom p_{J_i} gleich $(x - \sqrt{2}\,)^2\,(x + \pi)^2$ ist. (Gesucht sind also Repräsentanten der Ähnlichkeitsklassen.)

(b) Geben Sie für jedes J_i die Elementarteiler der charakteristischen Matrix sowie das Minimalpolynom an. (Sie brauchen die vorkommenden Polynome nicht auszumultiplizieren, eine Darstellung als Produkt genügt.) *4 + 6 = 10 Punkte*

Aufgabe 7.

Es sei $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und I die Einheitsmatrix. Bestimmen Sie

(a) die Elementarteiler der charakteristischen Matrix $A - xI$ und daraus dann

(b) die Frobenius-Normalform von A,

(c) die Weierstraß-Normalform von A,

(d) die Jordan-Normalform von A. *8 + 2 + 2 + 2 = 14 Punkte*

Aufgabe 8.

Bestimmen Sie den Exponenten der symmetrischen Gruppe S_5. (Mit Erläuterung.) *4 Punkte*

Aufgabe 9.

(a) Konstruieren Sie mit Hilfe der Kronecker-Konstruktion einen Körper mit 9 Elementen.

(b) Geben Sie alle Elemente dieses Körpers an. Finden Sie insbesondere ein Element der (multiplikativen) Ordnung 8. (Mit Begründung.) *5 + 6 = 11 Punkte*

Aufgabe 10.

In $V = \mathbb{R}^3$ seien die Standardbasis $B = (B_1, B_2, B_3)$, das Standardskalarprodukt Φ und ein Endomorphismus φ mit ${}_B\varphi_B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ gegeben. Berechnen Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von φ.

Hinweis: Die Eigenwerte von φ sind ganzzahlig. *10 Punkte*

Aufgabe 11.

Es sei V ein K-Vektorraum, und es seien φ und ψ vertauschbare Endomorphismen von V und c ein Eigenwert von ψ. Zeigen Sie: Der Eigenvektorraum $E_\psi(c)$ ist φ-invariant. *5 Punkte*

Aufgabe 12.

Im Vektorraum $\mathbb{C}^2$ mit Basis B seien ein (positiv definites) hermitesches Produkt Φ und ein Endomorphismus φ durch ${}_B\Phi_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ und ${}_B\varphi_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$ gegeben. Berechnen Sie die adjungierte Abbildung φ^{ad}. *6 Punkte*
