Lineare Algebra I – Klausur am 19.9.2007
Gruppe B

1. *(4+4+4+4 Pkt)* Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

   (a) Wenn $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ das charakteristische Polynom $\chi_A = x^3 + 3x^2 + 2x$ hat, so ist A diagonalisierbar und es gilt $\mathrm{Rang}(A) = 2$.

Lösung: Wahr. Da $\chi_A = x^3 + 3x^2 + 2x = x(x+1)(x+2)$, gibt es 3 verschiedene Eigenwerte, also ist A laut Satz 6.6 diagonalisierbar. Daher ist A zu der Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(0, -1, -2)$ ähnlich und hat deswegen denselben Rang, d.h., 2. *Alternativ:* Laut Satz 3.19 ist $\mathrm{Rang}(A) = 3 - \dim(\mathrm{Ke}(f))$, wobei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax$. $\mathrm{Ke}(f)$ ist aber nichts anderes als der Eigenraum zum Eigenwert 0, welcher Dimension 1 hat. Daher ist $\mathrm{Rang}(A) = 3 - 1 = 2$.

   (b) Es gibt eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ mit $\chi_{A^2} = (\chi_A)^2$.

Lösung: Falsch. Für eine $n \times n$ Matrix A hat χ_A Grad n. Da A^2 ebenso eine $n \times n$ Matrix ist, gilt $\mathrm{Grad}(\chi_{A^2}) = n$, aber $\mathrm{Grad}(\chi_A^2) = 2n > n$.

   (c) Ist $A \in K^{3\times 3}$ so, dass $\chi_A = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ mit $a_2, a_1, a_0 \in K$ und $a_0 \neq 0$, so folgt: A ist invertierbar und

$$A^{-1} = -\tfrac{1}{a_0}(A^2 + a_2A + a_1I_3).$$

Lösung: Wahr. Da $\det(A) = \chi_A(0) = a_0 \neq 0$, ist A invertierbar. Laut Cayley–Hamilton gilt $0 = \chi_A(A) = A^3 + a_2A^2 + a_1A + a_0I_3$, woraus man obige Formel ableitet.

   (d) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so ist $\lambda^2 + 7\lambda + 9$ ein Eigenwert von $A^2 + 7A + 9I_n$.

Lösung: Wahr. Aus $Ax = \lambda x$ folgt $(A^2 + 7A + 9I_n)x = (\lambda^2 + 7\lambda + 9)x$. *Alternativ:* Wenn $\det(A - \lambda I_n) = 0$, dann gilt $\det(A^2 + 7A + 9I_n - \lambda^2 I_n - 7\lambda I_n - 9I_n) = \det(A^2 - \lambda^2 I_n + 7(A - \lambda I_n)) = \det(A - \lambda I_n)\det(A + (\lambda + 7)I_n) = 0$.

2. *(6+10 Pkt)* Es sei U der Unterraum von $\mathbb{R}^4$, der von

$$x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

erzeugt wird. (a) Zeigen Sie, dass x_1, x_2, x_3 eine Basis von U sind. (b) Bestimmen Sie mithilfe des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis von U bezüglich des Standardskalarproduktes.

Lösung: (a) Da x_1, x_2, x_3 ein EZS von U sind, ist zu zeigen, dass x_1, x_2, x_3 linear unabhängig sind. Seien $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ so, dass $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ gilt. Dann gilt u.a. $a_2 + 5a_3 = 0, a_2 + 7a_3 = 0$, was $a_3 = a_2 = 0$ impliziert. Da $3a_1 + a_2 = 0$, ist auch $a_1 = 0$.

Antwort: (b)

$$w_1 = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; w_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -4/5 \\ 3/5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; w_3 = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 8/5 \\ -6/5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3. *(6+10 Pkt)* (a) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

nicht bijektiv ist. (b) Schreiben Sie für diesen speziellen Wert von a den Spaltenraum von A als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems.

Lösung : (a) $\det(A) = a$, also ist die Determinante genau dann gleich Null, wenn $a = 0$. (b)

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

und der Spaltenraum wird von den ersten zwei Spalten erzeugt. Wir lösen jetzt das LGS $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$, was den von $[-5, 2, 1]^T$ erzeugten VR als Lösungsmenge hat. Schließlich setzen wir $B = [-5, 2, 1]$ und $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid Bx = 0\}$ ist die Antwort.

4. *(4+12 Pkt)* (a) Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A, \tilde{A} \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie: Gilt $\tilde{A} = T^{-1}AT$ für ein invertierbares $T \in K^{n\times n}$, so folgt $A^k = T\tilde{A}^kT^{-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
(b) Diagonalisieren Sie

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 18 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

(d.h., bestimmen Sie T so, dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist) und benutzen Sie (a), um A^{51} zu berechnen.
Hinweis: Bei richtiger Rechnung ergibt sich $(A^{51})_{11} = -2 \cdot 2^{51} - 3$. *In ähnlicher Form sollten auch die anderen Einträge von* A^{51} *angegeben werden.*

Lösung : (a) Induktion über k. Für $k = 1$ gilt die Aussage per Annahme. Wenn $A^k = T\tilde{A}^kT^{-1}$ wahr ist, dann folgt $A^{k+1} = A \cdot T\tilde{A}^kT^{-1} = T\tilde{A}T^{-1}T\tilde{A}^kT^{-1} = T\tilde{A}^{k+1}T^{-1}$.

(b) $$A = TDT^{-1}, \text{ wobei } T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ und } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ also}$$

$$A^{51} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 2^{51} - 3 & 6 \cdot 2^{51} + 6 \\ -2^{51} - 1 & 3 \cdot 2^{51} + 2 \end{bmatrix}.$$

Bei folgenden Aufgaben zählt nur das Ergebnis, nicht der Rechenweg (außer, wenn explizit nach einer Begründung gefragt wird). Tragen Sie Ihr Ergebnis unten ein.
Wichtig: Geben Sie trotzdem unbedingt die Blätter mit Ihren Berechnungen ab!

5. *(10+3+3 Pkt)* Berechnen Sie (a) die Determinante, (b) den Rang, (c) die Spur von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Antwort: Det: $\boxed{-40}$ Rang: $\boxed{4}$ Spur: $\boxed{9}$

6. *(4+4+4+4+4 Pkt)* Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bestimmen Sie (a) die Eigenwerte, (b) den Rang, (c) die Eigenräume, (d) die Dimensionen der Eigenräume von

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(e) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist A diagonalisierbar? (Begründung auf Rechenblatt) (f) Bonus: Diskutieren Sie den Fall $a = 0$.

Antwort: EW: $\boxed{\{a, -a\}}$ Rang: $\boxed{3}$ Diag.bar für alle a mit: $\boxed{a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$

$$V(A,\ a\ ) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \qquad V(A,\ -a\ ) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad V(A,\ \ ) =$$

$$\dim V(A,\ a\ ) = 2 \qquad \dim V(A,\ -a\ ) = 1 \qquad \dim V(A,\ .\ ) =$$

Lösung Für $a \neq 0$ haben wir zwei verschiedene Eigenwerte, deren Eigenräume die Dimensionen 2 und 1 haben. Da $2 + 1 = 3$, ist A für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ diagonalisierbar.

Betrachten wir $a = 0$, dann ist A die Nullmatrix. Diese hat klarerweise nur einen Eigenwert, nämlich 0. Der Eigenraum dazu ist $\mathbb{R}^3$, also von der Dimension 3. Die Nullmatrix ist also diagonalisierbar (klar, da sie ja selbst schon eine Diagonalmatrix ist).