Aufgabenblatt 1 (Lineare Algebra I) zur
Vordiplom-Klausur Mathematik II (16. 9. 1999)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik
Priv.-Doz. Dr. R. Winkel, Lehrstuhl für Mathematik und Institut für Reine und Angewandte Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 1.

(a) Geben Sie ein Beispiel V eines 16-dimensionalen Vektorraums, dessen Elemente Abbildungen sind. (Vergessen Sie nicht die formal korrekte Angabe der Operationen.)

(b) Geben Sie Teilräume A, B Ihres Vektorraums V an, die die Dimensionen 3 und 4 haben und wo $S := A + B$ die Dimension 5 hat. Welche Dimension hat $D := A \cap B$? *4 + 2 = 6 Punkte*

Aufgabe 2.

Stellen Sie sich einen Vektorraum mit einer endlichen Basisfolge $\mathcal{B}$ als gegeben vor. Weiter seien Teilräume A und B durch endliche Folgen von Erzeugenden gegeben, die überdies als Linearkombinationen in der Basisfolge $\mathcal{B}$ dargestellt sind. Wie prüft man, ob A ein Teilraum von B ist? *4 Punkte*

Aufgabe 3.

Je nach Wahl des reellen Parameters t hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl}
1 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & - & (t+1) \cdot x_3 & = & -2 \\
0 \cdot x_1 & + & t \cdot x_2 & + & 0 \cdot x_3 & = & t \\
1 \cdot x_1 & - & t \cdot x_2 & + & 0 \cdot x_3 & = & 2-t
\end{array}$$

unterschiedliche Lösungsmengen.

(a) Für welche Werte von t ist das Gleichungssystem lösbar?

(b) Berechnen Sie in den lösbaren Fällen jeweils die Lösungsmenge M und schreiben Sie sie als Element eines Faktorraums F von $\mathbb{R}^{3\times 1}$. Welche Dimension hat F? *3 + 6 = 9 Punkte*

Aufgabe 4.

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem so gut wie es geht.

$$\begin{array}{rcrcl}
3x & + & 5y & = & 1 \\
6x & + & 10y & = & 7.
\end{array}$$

5 bis 7 Punkte

Aufgabe 5.

Wir betrachten die quadratischen Matrizen

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 8 \\ 8 & 8 & 22 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Berechnen Sie (multiplikativ) inverse Matrizen zu diesen Matrizen.

(b) Welche der durch $\alpha_i := (x \mapsto A_i x \text{ für } x \in \mathbb{R}^{3\times 1}) \colon \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1}$ definierten Abbildungen α_1, α_2, α_3 sind linear, welche injektiv, welche Isomorphismen?

(c) Auf einem 3-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit einer Basisfolge $\mathcal{B}$ seien zwei Skalarprodukte Φ und Ψ durch ihre Matrizen ${}^{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = A_2$ und ${}^{\mathcal{B}}\Psi_{\mathcal{B}} = A_3$ gegeben. Welche dieser Skalarprodukte sind nicht ausgeartet, welche positiv definit? (Begründung.) *6 + 3 + 5 = 14 Punkte*

Aufgabenblatt 2 (Lineare Algebra I) zur

Vordiplom-Klausur Mathematik II (16. 9. 1999)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik
Priv.-Doz. Dr. R. Winkel, Lehrstuhl für Mathematik und Institut für Reine und Angewandte Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 6.
Es sei $V = \mathbb{R}^{1\times 5}$.
Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ mit $\operatorname{Kern}\varphi < \operatorname{Bild}\varphi$?
Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ mit $\operatorname{Kern}\varphi = \operatorname{Bild}\varphi$?
Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ mit $\operatorname{Kern}\varphi > \operatorname{Bild}\varphi$?
(Antwort jeweils mit Beispiel oder Beweis.) *3 Punkte*

Aufgabe 7.
Zur reellen 3×5-Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ betrachten wir die lineare Abbildung $\varphi = (x \mapsto Ax \ \text{ für } \ x \in \mathbb{R}^{5\times 1})\colon \mathbb{R}^{5\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1}$. Berechnen Sie eine Basisfolge von $\mathbb{R}^{3\times 1}/\operatorname{Bild}\varphi$. *6 Punkte*

Aufgabe 8.
In einem n-dimensionalen K-Vektorraum V seien Basisfolgen $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ sowie eine lineare Abbildung φ und eine Bilinearform Φ gegeben, so dass ${}_{\mathcal{D}}\mathrm{id}_{\mathcal{B}} = {}^{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}} = A \in K^{n\times n}$ und ${}_{\mathcal{D}}\mathrm{id}_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = B \in K^{n\times n}$ gilt. Berechnen Sie für die Matrizen ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$ und ${}^{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}}$ jeweils eine Formel, die die gesuchte Matrix in A und B ausdrückt (und keine Klammern enthält). *5 Punkte*

Aufgabe 9.
(a) Geben Sie ein Beispiel eines $\mathbb{R}$-Vektorraums V mit einer nicht ausgearteten Bilinearform Φ und einem Teilraum $W \leq V$, für den V nicht die (innere) direkte Summe der Teilräume W und $W^\perp$ ist.
(b) Gilt in Ihrem Beispiel die Formel $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$? *4 + 1 = 5 Punkte*

Aufgabe 10.
Auf dem reellen Intervall $I = [0,1]$ sei die Funktion $f = (x \mapsto -x^2 + 1)\colon I \to I$ gegeben. Stellen sie sich vor, jemand fragt Sie: Welche der beiden Polynomfunktionen $g = (x \mapsto -x + 1)\colon I \to I$ und $h = (x \mapsto -x + \frac{5}{4})\colon I \to I$ vom Grad 1 approximiert f „besser"? Da Sie wegen Ihrer Klausur wenig Zeit haben, überlassen Sie ihm das Rechnen und sagen ihm nur, welche Ausdrücke er ausrechnen soll. Welche? *4 Punkte*

Aufgabe 11.
Wie viele Geraden hat ein 3-dimensionaler affiner Raum (also ein affiner Raum über einem 3-dimensionalen Vektorraum) über dem Körper $\mathbb{Z}_2$? (Wie ergibt sich diese Anzahl?) *4 Punkte*

Aufgabe 12.
Wegen $4711 = 7 \cdot 673$ ist der Restklassenring $\mathbb{Z}_{4711} = \mathbb{Z}/4711\,\mathbb{Z}$ kein Körper. Trotzdem besitzt die Restklasse, in der die Zahl 205 liegt, ein (multiplikativ) inverses Element (warum?). Berechnen Sie es (und erläutern Sie dabei Ihre Rechnung). *5 Punkte*

Aufgabenblatt 3 (Diskrete Strukturen) zur

Vordiplom-Klausur Mathematik II (16. 9. 1999)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik
Priv.-Doz. Dr. R. Winkel, Lehrstuhl für Mathematik und Institut für Reine und Angewandte Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 13.

Formulieren Sie den Satz von Dilworth für den Spezialfall eines Spernerposets P, und verifizieren Sie ihn am Hassediagramm eines rangsymmetrischen Spernerposets ihrer Wahl, welches $\mathcal{B}_3$ (=Poset der Teilmengen von $\{1,2,3\}$) als echtes induziertes Unterposet enthält. *7 Punkte*

Aufgabe 14.

(a) Zeichnen Sie die Hassediagramme des Posets $P = \underline{1} \oplus (\underline{2} + \underline{2}) \oplus \underline{1}$ und des Posets $\mathcal{O}(P)$ aller Ideale von P. Geben Sie den Elementen von P geeignete Namen und notieren Sie an jedem Element von $\mathcal{O}(P)$ die Elemente des entsprechenden Ideals von P; unterstreichen Sie dabei die Elemente der erzeugenden Antikette.

(b) Charakterisieren Sie für beliebige Posets P und Q die Elemente von $\mathcal{O}(P \oplus Q)$ mit Hilfe der Elemente von $\mathcal{O}(P)$ und $\mathcal{O}(Q)$. *6 + 4 = 10 Punkte*

Aufgabe 15.

Beweisen Sie einmal algebraisch und dann kombinatorisch mit Hilfe von Teilmengen:

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k} \qquad \text{für} \quad n, r, k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

und leiten Sie daraus ab:

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k} = 2^r \binom{n}{r} \ .$$

8 Punkte

Aufgabe 16.

N.N. behauptet:

“Die Anzahl der k-Multimengen, die man aus einer n-Menge bilden kann, ist $\frac{n^k}{k!}$, weil ....”

(a) Was hat N.N. vermutlich als Begründung gegeben und was ist daran verkehrt?

(b) Welches ist die richtige Anzahl? Ist diese $\geq$ oder $\leq$ als $\frac{n^k}{k!}$, oder hängt das von n und k ab?

(c) Geben Sie einen Beweis des richtigen Ergebnisses. *4 + 2 + 3 = 9 Punkte*

Aufgabe 17.

Eine Zählfunktion $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ habe die rationale erzeugende Funktion

$$\sum_{n \geq 0} f(n)x^n = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{-4x^3 + 4x^2 + 7x + 2}{4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1} \ .$$

Bestimmen Sie eine Rekursionformel (inklusive Anfangsbedingungen) und eine explizite Darstellung für f. *12 Punkte*

Aufgabenblatt 4 (Diskrete Strukturen) zur
Vordiplom-Klausur Mathematik II (16. 9. 1999)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik
Priv.-Doz. Dr. R. Winkel, Lehrstuhl für Mathematik und Institut für Reine und Angewandte Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 18.
Für jede natürliche Zahl n sei

$$L_n := \{(l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}_0^n \mid 0 \leq l_i \leq n - i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

und S_n die Menge der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$.

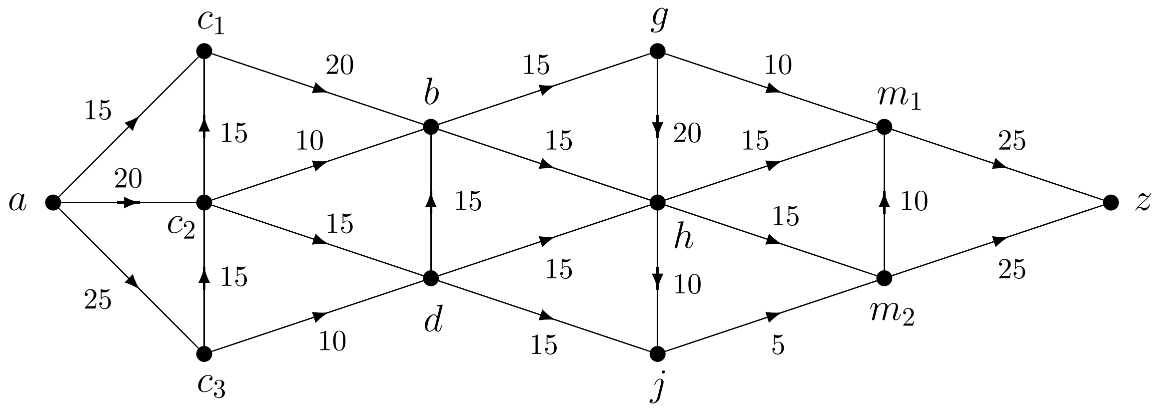
(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $L : S_n \longrightarrow L_n$ definiert durch

$$l_i = l_i(\pi) := \sharp\{j \mid i < j, \pi(i) > \pi(j)\} \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n$$

eine Bijektion mit $l_1 + \ldots + l_n = l(\pi)$ $[l(\pi)$ die Länge von $\pi]$ ist.

(b) Berechnen Sie $L(\pi)$ für $\pi = 4163752 \in S_7$ und $L^{-1}(3, 6, 4, 0, 2, 1, 1, 0) \in S_8$. *6 + 2 = 8 Punkte*

Aufgabe 19.
Bestimmen Sie für das nachstehend abgebildete Netzwerk zwei maximale Flüsse mit *verschiedenen* zugehörigen minimalen Schnitten $L = (A, \overline{A})$:



Überprüfen Sie, dass es sich bei Ihren Lösungen tatsächlich um Flüsse handelt und dass in beiden Fällen die maximalen Flussstärken mit den minimalen Kapazitäten übereinstimmen; markieren Sie alle für die Berechnung der Kapazität relevanten Kanten. *12 Punkte*

Aufgabe 20.

(a) Geben Sie den Satz von Turan an und folgern Sie daraus, dass jeder Graph mit $2n$ Ecken und $n^2 + 1$ oder mehr Kanten einen K_3 als Untergraph enthält.

(b) Zeigen Sie, dass jeder 3-reguläre Graph G eine gerade Eckenzahl hat, und bestimmen Sie die Anzahl der Kanten von G.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von (a) und (b), dass es (bis auf Isomorphie) nur einen 3-regulären Graphen mit 4 Ecken geben kann. *4 + 2 + 2 = 8 Punkte*
