2. Semesterklausur zur Linearen Algebra I (11. 2. 94)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur `eine` Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen `wesentlichen` Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Formulieren Sie vollständige Sätze (keine logischen Pfeile!) und vergessen Sie nicht, jedes „für alle“ oder „es gibt ein“ wirklich hinzuschreiben. Alle Bezeichnungen, die Sie benutzen und die nicht aus dem Aufgabentext stammen, müssen Sie erklären. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Es sei $V = \mathbf{V}_{4\times 1}(\mathbb{Z}_3)$.

(a) Wieviele Elemente hat V? (Ausrechnen!) *1 Punkt*

(b) Wieviele Basisfolgen hat V? (Eine Formel genügt.) *2 Punkte*

(c) Wieviele Teilräume der Dimension 2 hat V? (Ausrechnen!) *2 Punkte*

Aufgabe 2.
Es sei $V = \mathbf{V}_{2\times 1}(\mathbb{Q})$. Welche der folgenden Abbildungen $\Phi_j : \mathbf{V}\times\mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{Q}$ sind Bilinearformen? (Jeweils, falls nein, ein konkretes (!) Gegenbeispiel; falls ja, genügt ein kurzer Hinweis warum.)

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(X,Y) &= x_1x_2 + y_1y_2 \\ \Phi_2(X,Y) &= (x_1+x_2)(y_1-y_2) \\ \Phi_3(X,Y) &= (x_1-y_1)+(x_2-y_2) \end{aligned}\right\} \text{ für } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ und } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

3 Punkte

Aufgabe 3.
Bestimmen Sie die Menge aller Zahlentripel (x, y, z), für die die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & x & 5 \\ 2 & y & 4 \\ 3 & z & 6 \end{pmatrix} \in \mathbf{V}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ invertierbar ist. (Beschreiben Sie diese Menge mit Hilfe eines polynomialen Ausdrucks in x, y und z.) *3 Punkte*

Aufgabe 4.
Es sei $V = \mathbf{V}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ und $\mathcal{B} = (B_1, B_2, B_3)$ eine Basisfolge von V.
Ein Skalarprodukt Φ auf V sei gegeben durch die Matrix $\mathrm{M}(\mathcal{B}, \Phi, \mathcal{B}) = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie das Radikal von V bezüglich Φ. *4 Punkte*

(b) Ist Φ ausgeartet? (Antwort mit Begründung.) *1 Punkt*

Aufgabe 5.
V, $\mathcal{B}$, Φ und A seien gegeben wie in Aufgabe 4.

(a) Berechnen Sie eine Orthogonalbasis von V bezüglich Φ. *6 Punkte*

(b) Ist Φ positiv definit? (Antwort mit Begründung.) *2 Punkte*

Aufgabe 6.
V, $\mathcal{B}$, Φ und A seien gegeben wie in Aufgabe 4. Eine weitere Basisfolge $\mathcal{C} = (C_1, C_2, C_3)$ von V sei durch die Basiswechselmatrix $\mathrm{M}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Berechnen Sie die Matrix $\mathrm{M}(\mathcal{C}, \Phi, \mathcal{C})$. *2 Punkte*

Aufgabe 7.
V, $\mathcal{B}$, Φ und A seien gegeben wie in Aufgabe 4, und es sei $S = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbf{V}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

(a) Berechnen Sie die Determinanten von A und S. *3 Punkte*

(b) Beweisen Sie: Es gibt keine Basisfolge $\mathcal{A} = (A_1, A_2, A_3)$ von V mit $\mathrm{M}(\mathcal{B}, \Phi, \mathcal{A}) = S$. *2 Punkte*

Aufgabe 8.
V, $\mathcal{B}$, Φ und A seien gegeben wie in Aufgabe 4.

(a) Invertieren Sie die Matrix A (mit anschließender Probe). *3 Punkte*

(b) Berechnen Sie die Basiswechselmatrix $\mathrm{M}(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ einer Basisfolge $\mathcal{D}$ von V, so daß $(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ ein Paar zueinander bezüglich Φ dualer Basisfolgen ist. *3 Punkte*

Aufgabe 9.
V, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, A und T seien gegeben wie in den Aufgaben 4 und 6, und es sei $\alpha\colon V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit $\mathrm{M}(\mathcal{B}, \alpha, \mathcal{B}) = A$. Berechnen Sie die Matrix $\mathrm{M}(\mathcal{C}, \alpha, \mathcal{C})$. *3 Punkte*

Aufgabe 10.
Es sei V ein Vektorraum und $\varphi : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie: Sind für eine feste Basisfolge $\mathcal{B}$ von V die Folgen $\mathcal{B}$ und $\varphi(\mathcal{B})$ gleichorientierte Basisfolgen, so sind für jede Basisfolge $\mathcal{C}$ von V die Folgen $\mathcal{C}$ und $\varphi(\mathcal{C})$ gleichorientierte Basisfolgen. *3 Punkte*

Aufgabe 11.
Es sei $E = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \subseteq \mathbb{R}$, und es seien l und m die Funktionen in $\mathbb{R}^E$ mit den folgenden Werten.

x	-2	-1	0	1	2
$l(x)$	1	1	0	1	1
$m(x)$	0	1	1	1	0

Approximieren Sie die Funktion $f = (x \longmapsto x^2 - 1 \text{ für } x \in E) \in \mathbb{R}^E$ durch eine Funktion im Teilraum $T = \langle l, m \rangle$ bezüglich des durch

$$\Gamma(g, h) = \sum_{x \in E} g(x) h(x)$$

gegebenen Skalarprodukts. *6 Punkte*