1. Nachholklausur zur Linearen Algebra I (8. 4. 1994)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur `eine` Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen `wesentlichen` Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Formulieren Sie vollständige Sätze (keine logischen Pfeile!) und vergessen Sie nicht, jedes „für alle“ oder „es gibt ein“ wirklich hinzuschreiben. Alle Bezeichnungen, die Sie benutzen und die nicht aus dem Aufgabentext stammen, müssen Sie erklären. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Formulieren Sie eine Definition für den Ausdruck „erzeugt den Vektorraum V“. (Vergessen Sie nicht, alle Voraussetzungen anzugeben. Vermengen Sie nicht verschiedene, aber äquivalente Formulierungen; nur eine ist verlangt.) *3 Punkte*

Aufgabe 2.
Es sei F der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

a) Ist $M_1 = \{f \in F \mid f(-1) \le f(0) \le f(1)\}$ ein Teilraum von F? *2 Punkte*

b) Ist $M_2 = \{f \in F \mid f(-1) + f(1) = f(0)\}$ ein Teilraum von F? *3 Punkte*

c) Ist $M_3 = \{f \in F \mid f(-1) = f(0) \text{ oder } f(1) = f(0)\}$ ein Teilraum von F? *2 Punkte*

Antwort jeweils mit Begründung.

Aufgabe 3.
Ist die Teilmenge $M = \{\,(1,1,0),\ (0,0,0),\ (1,1,1),\ (0,1,0)\,\}$ von $\mathbf{V}_{1\times 3}(\mathbb{Z}_2)$ eine Restklasse? (Begründung.) *4 Punkte*

Aufgabe 4.
Über dem Körper $\mathbb{Z}_{11}$ mit 11 Elementen ist ein <u>lösbares</u> inhomogenes lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 6 Unbekannten gegeben. Für welche der Zahlen

$$\begin{array}{llll} n_1 = 1, & n_3 = 11, & n_5 = 100, & n_7 = 3000, \\ n_2 = 3, & n_4 = 33, & n_6 = 1000, & n_8 = 15000 \end{array}$$

ist die Aussage $\mathrm{A}(n_i)$:

„Das System hat notwendigerweise mindestens n_i Lösungen“

richtig, für welche nicht? (Achten Sie auf eine vollständige Begründung Ihrer Antwort.) *5 Punkte*

Aufgabe 5.
Im $\mathbb{Z}_5$-Vektorraum $\mathbf{V}_{1\times 5}(\mathbb{Z}_5)$ sind die folgenden Vektoren gegeben.

$$\begin{aligned} X_1 &= (1,2,3,4,0), \\ X_2 &= (4,1,3,0,2), \\ X_3 &= (1,1,2,1,1), \\ X_4 &= (0,2,1,3,4), \\ X_5 &= (3,0,2,0,4). \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie eine Basisfolge für das Erzeugnis $T = \langle X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \rangle$. *4 Punkte*

b) Welche Dimensionen haben die Teilräume $T_1 = \langle X_1, X_2, X_3 \rangle$, $T_2 = \langle X_3, X_4, X_5 \rangle$ und $T_3 = T_1 \cap T_2$? *4 Punkte*

Aufgabe 6.
Im Vektorraum $F(\mathbb{R})$ aller reellwertigen Abbildungen auf $\mathbb{R}$ betrachten wir die Funktionen

$$\begin{aligned} s &= (\, x \longmapsto \sin x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}\,), \\ c &= (\, x \longmapsto \cos x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}\,), \\ q &= (\, x \longmapsto x^2 \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}\,). \end{aligned}$$

Ist die Folge (s, c, q) linear unabhängig? (Antwort mit Begründung.) *4 Punkte*

Aufgabe 7.

a) Hat die Restklasse $\overline{55}$ im Restklassenring $\mathbb{Z}_{96}$ ein inverses Element bezüglich der Multiplikation? (Berechnen Sie es, oder zeigen Sie, daß es keins gibt.) *5 Punkte*

b) Hat die Restklasse $\overline{6}$ im Restklassenring $\mathbb{Z}_{96}$ ein inverses Element bezüglich der Multiplikation? (Berechnen Sie es, oder zeigen Sie, daß es keins gibt.) *3 Punkte*

Aufgabe 8.

a) Die ganzzahligen Lösungen $(x, y) \in \mathbf{V}_{1\times 2}(\mathbb{Z})$ der Gleichung $113x + 37y = 0$ bilden den $\mathbb{Z}$-Modul $H = (37, -113) \cdot \mathbb{Z}$. Nun sei (x_0, y_0) eine ganzzahlige Lösung der Gleichung

$$113x + 37y = 1.$$

Geben Sie die Menge aller ganzzahligen Lösungen dieser Gleichung an. *2 Punkte*

b) Berechnen Sie eine ganzzahlige Lösung $(x_0, y_0) \in \mathbf{V}_{1\times 2}(\mathbb{Z})$ der Gleichung $113x+37y = 1$. *4 Punkte*

Aufgabe 9.
Im $\mathbb{C}$-Vektorraum $V = \mathbf{V}_{4\times 1}(\mathbb{C})$ sind die Vektoren $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 1+i \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} i \\ 1+i \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix}$

gegeben. Die Folge (X_1, X_2, X_3) ist offensichtlich linear unabhängig. Geben Sie einen Teilraum U von V an derart, daß $(\, X_1 + U,\ X_2 + U,\ X_3 + U\,)$ eine Basisfolge des Faktorraums V/U ist. (Begründung.) *5 Punkte*

Aufgabe 10.
In einem affinen Raum M über $\mathbf{V}_{3\times 1}(\mathbb{Q})$ ist ein Punkt $p \in M$ vorgegeben („Ursprung“). Wir definieren Geraden

$$G = p * R \quad \text{und} \quad H = p * S$$

durch Angabe der Restklassen

$$R := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{und} \quad S := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Zeigen Sie, daß die Geraden G und H sich nicht schneiden. *5 Punkte*
