Lineare Algebra I, WS 2002/03, Prof. Dr. U. Schoenwaelder **Gruppe A**

Scheinklausur (Teil A), 13.12.2002

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Scheinklausur (Teil A), 13.12.2002, **Ankreuzteil, Gruppe A**

Kreuzen Sie bei jeder Frage der Aufgaben 1 bis 6 entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an. Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg. Wenn Sie bei einer Frage unsicher sind, machen Sie einfach kein Kreuz.

1	Es sei V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Weiter seien $n, m \in \mathbb{N}$, und es sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis und $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ ein Erzeugendensystem von V. Sind die folgenden Behauptungen in dieser Situation immer richtig?	
	$(v_1, w_2, \ldots, w_m)$ ist ein Erzeugendensystem von V.	☐ Ja ☐ Nein
	$(v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_1)$ ist eine Basis von V.	☐ Ja ☐ Nein
	Es gibt ein $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq n$, so dass $(v_1, \ldots, v_{i-1}, w_1, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ eine Basis von V ist.	☐ Ja ☐ Nein
	Es gibt ein $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq n$, so dass $(w_1, \ldots, w_{m-1}, v_i)$ ein Erzeugendensystem von V ist.	☐ Ja ☐ Nein
2	Welche der folgenden Mengen U sind Teilraum des jeweils angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorraums V?	
	$U := \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ ist beschränkt} \right\} \subseteq V := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	☐ Ja ☐ Nein
	$U := \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) \leq 17 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \right\} \subseteq V := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	☐ Ja ☐ Nein
	$U := \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + b^2 = 0 \right\} \subseteq V := \mathbb{R}^3$	☐ Ja ☐ Nein
3	Ist die Abbildung $f = ((x, y) \mapsto x + 2y) : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ injektiv?	☐ Ja ☐ Nein
	Ist die Abbildung $f = ((x, y) \mapsto (x - y, x + y)) : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ surjektiv?	☐ Ja ☐ Nein
	Ist die Abbildung $f = (x \mapsto (x, -x)) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ injektiv?	☐ Ja ☐ Nein
4	Es sei $r \in \mathbb{N}$. Für jede Matrix A bezeichnen wir mit A^* ihre Hermite-Normalform. Welche der folgenden Aussagen gelten für jede Matrix A vom Rang r?	
	Je $r + 1$ Spalten von A (mit verschiedenen Spaltenindizes) erzeugen den Spaltenraum von A.	☐ Ja ☐ Nein
	Es gibt r Spalten von A, die (gemeinsam) den Spaltenraum von A^* erzeugen.	☐ Ja ☐ Nein
	Die Zeilenräume von A und A^* haben die gleiche Dimension.	☐ Ja ☐ Nein
5	Gibt es einen 2-dimensionalen Vektorraum (über einem geeigneten Körper), der genau 8 Elemente hat?	☐ Ja ☐ Nein
	Gibt es einen 17-dimensionalen Vektorraum (über einem geeigneten Körper), der genau 13 mal so viele Elemente hat wie jeder seiner 16-dimensionalen Teilräume?	☐ Ja ☐ Nein
6	Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Sind die folgenden Aussagen für jedes lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^{m \times 1}$ richtig?	
	Ist $n > m$, dann hat das Gleichungssystem $Ax = b$ mindestens eine Lösung.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $n = m$ und Rang $A = n$, dann ist das Gleichungssystem $Ax = b$ eindeutig lösbar.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist Rang $A = m$, dann hat das Gleichungssystem $Ax = b$ eine Lösung.	☐ Ja ☐ Nein

Name: ____________________ **Matrikelnummer:** ____________________

Scheinklausur (Teil A), 13.12.2002, **Ergebnisteil, Gruppe A**

Tragen Sie bei den Aufgaben 7 bis 10 jeweils nur die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. Sie brauchen die Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für jede richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für falsche Antworten gibt es **Null** Punkte.

7	Gegeben ist die Matrix $P := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \underline{3}^{3\times 3}$ über dem Körper mit 3 Elementen. Berechnen Sie die zu P inverse Matrix $P^{-1} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$. *(4 Punkte)*
8	Gegeben ist die Matrix $M := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \underline{2}^{4\times 5}$ über dem Körper mit 2 Elementen. Berechnen Sie $\dim M^{\perp} = \boxed{}$ und $\dim {}^{\perp}M = \boxed{}$. *(Je 2 Punkte: zusammen 4 Punkte)*
9	Es sei A eine $m \times n$-Matrix vom Rang r über einem Körper K (mit $m, n, r \in \mathbb{N}$). Berechnen Sie eine Formel in m, n, r für die Zahl $\dim A^{\perp} - \dim {}^{\perp}A + \dim \operatorname{Spr} A = \boxed{}$. *(4 Punkte)*
10	Geben Sie <u>alle</u> Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ an, für die es ein homogenes oder inhomogenes lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 5 Unbekannten über dem Körper $\underline{2}$ (mit 2 Elementen) gibt, das genau n Lösungen hat. $\boxed{}$. *(4 Punkte)*

Scheinklausur (Teil A), 13.12.2002, **schriftlicher Teil, Gruppe A**

Beantworten Sie die Aufgaben 11 bis 14 schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

11	Gibt es in einem geeigneten Vektorraum eine linear abhängige Folge von drei Vektoren, von denen je zwei eine linear unabhängige Folge bilden? Geben Sie ein Beispiel oder einen Beweis der Unmöglichkeit an. *(4 Punkte)*
12	Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie: Ist (v_1, v_2) eine linear unabhängige Folge von Vektoren aus V und $k \in K$, dann ist auch $(v_1 + k \cdot v_2,\ v_2)$ linear unabhängig. *(4 Punkte)*
13	Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum, dessen Dimension größer oder gleich 2 ist. Zeigen Sie: Ist $0 \neq v \in V$, dann gibt es eine linear unabhängige Folge (u, w) von Vektoren aus V mit $v = u + w$. *(4 Punkte)*
14	Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Bestimmen Sie den Rang der Matrix $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$, wobei für die Einträge $A_{i,j}$ von A gilt, dass $A_{i,j} = i + j - 1 \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{und} \quad 1 \leq j \leq n$ ist. Beweisen Sie Ihr Ergebnis. *(4 Punkte)*