3.4.2000

Nachholklausur zur Linearen Algebra I

WS99/00

Ankreuzteil

Dieses Blatt muss abgegeben werden. Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung: Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg.
Die Zahl der Punkte aus dem Ankreuzteil wird durch 2 geteilt und zur Zahl der Punkte aus dem anderen Teil addiert, um die Gesamtpunktzahl der Klausur zu errechnen.
Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

Aufgabe 1. Sei $\mathbb{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen und V der $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^{2\times 2}$. Sind die folgenden Teilmengen Teilräume?

$\left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{Q} \right\}$ ______ $\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein

$\left\{ \begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{bmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{Q} \right\}$ ______ ☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein

$\left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x^2 \end{bmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{Q} \right\}$ ______ ☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein

$\{A \in V \mid \text{Spur } A = 0\}$ ______ $\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein

$\{A \in V \mid \det\ A = 0\}$ ______ ☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein

---

Aufgabe 2. Es sei K ein Körper, V und W K-Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

$\text{Kern}(\varphi) = \{w \in W \mid \text{es gibt } v \in V \text{ mit } \varphi(v) \neq w\}$ ☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein

Für $M \subseteq W$ ist $\overset{-1}{\varphi}(M) = \{v \in V \mid \varphi(v) \in M\}$ ein Teilraum von V ☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein

$\text{Kern}(\varphi) \subseteq \text{Kern}(\varphi^2)$, falls $V = W$ $\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein

$\{(v_1, v_2) \in V \times V \mid \varphi(v_1 - v_2) = 0\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf V $\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein

$\text{Bild}(\varphi) = \{w \in W \mid \text{es existiert ein } v \in V \text{ mit } w = \varphi(v)\}$ $\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein

---

Aufgabe 3. Es seien $A, A', S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (nicht notwendig invertierbar) mit $AS = SA'$. Dann gilt:

$\det A^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N} \implies \det A = 0$ $\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein

$\det(A \cdot A^T) \geq 0$ $\boxed{\square}$ Ja ☐ Nein

$\det(A + A') = \det A + \det A'$ ☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein

$\det A = \det A'$ ☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein

$\det(sA) = s \det(A)$ für alle $s \in \mathbb{R}$ ☐ Ja $\boxed{\square}$ Nein

Aufgabe 4. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\{[1,0,1],[1,1,1]\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^{1\times 3}$.	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\{[1,1,1],[1,1,0],[2,2,1]\}$ ist Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^{1\times 3}$.	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\{[1,0],[1,-1]\}$ ist linear unabhängig in $\mathbb{R}^{1\times 2}$.	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
$\{[0,0,1],[0,1,0],[1,1,1]\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^{1\times 3}$.	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
$\{[1,1,1],[1,1,0]\}$ ist Basis des Teilraums $\langle[1,2,0],[2,2,1]\rangle$ von $\mathbb{R}^{1\times 3}$.	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein

---

Aufgabe 5. Es seien $\varphi : V \to W$ und $\psi : W \to U$ lineare Abbildungen zwischen den K-Vektorräumen V, W und U. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

Wenn φ und ψ injektiv sind, dann ist auch $\psi\circ\varphi$ injektiv.	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
Wenn φ und ψ surjektiv sind, dann ist auch $\psi\circ\varphi$ surjektiv.	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
Wenn φ surjektiv und ψ injektiv ist, dann ist auch $\psi\circ\varphi$ injektiv.	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
Wenn $\psi\circ\varphi$ surjektiv ist, dann ist auch ψ surjektiv.	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
Wenn $\psi\circ\varphi$ injektiv ist, dann ist auch ψ injektiv.	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein

---

Aufgabe 6. S sei ein lineares Gleichungssystem mit 5 Gleichungen und 3 Unbekannten über dem Körper $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

Jedes solche S hat eine Lösung.	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
Es gibt ein solches S, das eindeutig lösbar ist.	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
Es gibt ein solches S, das genau 2 Lösungen hat.	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
Es gibt ein solches S, das unendlich viele Lösungen hat.	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
Jedes solche S hat unendlich viele Lösungen.	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein

---

Aufgabe 7. Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $c \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Dann gilt:

Ist $A^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so ist $\mathrm{Rang}(A) < n$	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
$\mathrm{Rang}(A+B) \geq \min(\mathrm{Rang}(A), \mathrm{Rang}(B))$	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\mathrm{Rang}(c\cdot c^T) = 1$, falls $c \neq 0$	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
$\mathrm{Rang}(c^T\cdot c) = 1$, falls $c \neq 0$	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
$\mathrm{Rang}(AB) = \mathrm{Rang}(BA)$	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein

---

Aufgabe 8. Welche der folgenden Matrizen aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sind diagonalisierbar?

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ________________	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ________________	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ________________	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ________________	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ________________	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein

Aufgaben mit Begründung

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen. Natürlich dürfen Sie Aussagen aus der Vorlesung ohne Beweis benutzen.

Aufgabe 9.
Sei $V := \mathbb{R}^{1\times 2}$ und $\varphi : V \to V$ die Abbildung, die durch $\varphi([x,y]) = [3x-7y, x-2y]$ gegeben ist. Seien weiter $\mathcal{B}_1 := ([1,2],[2,1])$ und $\mathcal{B}_2 := ([0,1],[-1,0])$.

(a) Zeigen Sie, dass φ linear ist. (2 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ Basisfolgen von V sind. (2 Punkte)

(c) Berechnen Sie ${}_{B_1}[\mathrm{id}_V]_{B_2}$ und ${}_{B_2}[\varphi]_{B_1}$. (2 Punkte)

(d) Wie erhält man ${}_{B_1}[\varphi]_{B_1}$ und ${}_{B_2}[\varphi]_{B_2}$ direkt aus den Ergebnissen aus (c)? (2 Punkte)

Aufgabe 10.
Sei $A = [a_{ij}] \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und

$$a_{ij} = i \cdot j \qquad \text{für } 1 \leq i,j \leq n$$

Man berechne $\mathrm{Rang}(A)$ und $\det(A)$. (6 Punkte)

Aufgabe 11.
Sei K ein Körper, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in V = K^{2\times 2}$ und $\varphi: \ V \longrightarrow V$ definiert durch $\varphi(X) = AX - XA$ für alle $X \in V$.

(a) Zeigen Sie, dass φ linear ist. (2 Punkte)

(b) Geben Sie je eine Basis von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ und $\mathrm{Bild}(\varphi)$ an. (3 Punkte)

(c) Ergänzen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ zu einer Basis von V. (3 Punkte)

Aufgabe 12.
Es sei K ein Körper, in dem $1 \neq -1$ gilt. Weiter sei $\varphi : K^{1\times n} \to K^{1\times n}$ die lineare Abbildung, die Vektoren „spiegelt", es gelte also $\varphi([x_1, x_2, \ldots, x_n]) = [x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1]$.

(a) Man berechne das Minimalpolynom von φ. (2 Punkte)

(b) Ist φ diagonalisierbar? (2 Punkte)

(c) Was sind die Eigenwerte von φ? (2 Punkte)

(d) Geben Sie zu jedem Eigenwert eine Basis des zugehörigen Eigenraums an. (2 Punkte)

Aufgabe 13.
Es sei $A \in \mathbb{F}_2^{4\times 4}$ die folgende Matrix:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Zeigen Sie: 1 ist Eigenwert von A. (3 Punkte)

(b) Berechnen Sie den Eigenraum von A zum Eigenwert 1. (3 Punkte)

(c) Berechnen Sie die Jordansche Normalform von A. (4 Punkte)