1. Semesterklausur zur Linearen Algebra I (9. 12. 94)

Professor Dr. H. Pahlings, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Von den 11 gegebenen Aufgaben für insgesamt 48 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten, jedoch werden nur maximal 40 der erreichten Punkte auf den Übungsschein angerechnet. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Geben Sie für die folgenden Begriffe jeweils eine vollständige Definition an.

a) Dimension eines endlich erzeugten Vektorraumes,

b) Summe $T_1 + T_2$ zweier Teilräume eines Vektorraumes,

c) Kern einer linearen Abbildung.

(Vergessen Sie nicht, alle Bezeichnungen, die Sie einführen, zu erklären.) *3 Punkte*

Aufgabe 2.
Geben Sie ein Element $a \neq 0$ im Ring $\mathbb{Z}_6$ an, das kein (multiplikativ) inverses Element besitzt. (Mit Beweis) *3 Punkte*

Aufgabe 3.
Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{Q}^2$ sind Teilräume von $\mathbb{Q}^2$?

$$M_1 := \{\, (a,b) \mid a = b + 5 \,\}, \quad M_2 := \{\, (a,b) \mid a = b \cdot 5 \,\}, \quad M_3 := \{\, (a,b) \mid a = b^5 \,\}.$$

(Antwort jeweils mit Begründung) *4 Punkte*

Aufgabe 4.
Beweisen Sie oder widerlegen Sie (durch Angabe eines konkreten Gegenbeispiels) die folgende Behauptung: Ist V ein K-Vektorraum über einem Körper K und sind u, v, w Vektoren aus V mit der Eigenschaft, daß jede der Mengen $\{u, v\}$, $\{u, w\}$ und $\{v, w\}$ linear unabhängig ist, so ist auch die Menge $\{u, v, w\}$ linear unabhängig. *3 Punkte*

Aufgabe 5.
Welche der folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ sind linear?

$$\varphi_1\colon (x_1, x_2) \longmapsto (x_1 - x_2,\, 0,\, 2x_1 - x_2), \qquad \varphi_2\colon (x_1, x_2) \longmapsto (x_1 x_2,\, x_1,\, x_2).$$

(Antwort jeweils mit Begründung) *4 Punkte*

Aufgabe 6.
Im Vektorraum $V = \mathbb{Z}_5^{3\times 1}$ seien die Teilräume $T_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ und $T_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Dimensionen von $T_1 + T_2$ und $T_1 \cap T_2$. *4 Punkte*

b) Bestimmen Sie eine Basis von V/T_1. *2 Punkte*

Aufgabe 7.
Es sei $n \in \mathbb{N}$ und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Zeigen Sie: Es gibt genau dann eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ mit $\operatorname{Kern}\varphi = \operatorname{Bild}\varphi$, wenn n gerade ist. *4 Punkte*

Aufgabe 8.
Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\varphi\colon V \to V$ definiert durch $\varphi(X) = AXA$ für alle $X \in V$.

a) Zeigen Sie, daß φ linear ist. *1 Punkt*

b) Geben Sie je eine Basis von $\operatorname{Kern}\varphi$ und $\operatorname{Bild}\varphi$ an. *4 Punkte*

c) Ergänzen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern}\varphi$ zu einer Basis von V. *1 Punkt*

Aufgabe 9.
Es sei V ein K-Vektorraum, T ein Teilraum von V, der nicht nur aus dem Nullvektor besteht, und $v_1, \dots, v_n \in V$, so daß $(v_1 + T, \dots, v_n + T)$ eine Basis von V/T ist. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) $(v_1, \dots, v_n)$ ist ein Erzeugendensystem von V. *2 Punkte*

b) $(v_1, \dots, v_n)$ ist linear unabhängig in V. *2 Punkte*

Aufgabe 10.
Gegeben sei der 3-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle \leq \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $p_i(x) = x^i$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ und $x \in \mathbb{R}$. (Wir wissen aus der Vorlesung, daß (p_1, p_2, p_3) linear unabhängig ist.)
Weiter sei $W = \mathbb{R}^{3\times 1}$, und es sei $\varphi\colon V \to W$ die durch $\varphi(f) = \begin{pmatrix} f(-2) \\ f(0) \\ f(2) \end{pmatrix}$ definierte Abbildung von V in W. Ist φ linear? Ist φ surjektiv? Ist φ injektiv?
(Antwort jeweils mit Begründung) *5 Punkte*

Aufgabe 11.
Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $a_{ij} = j - i$ für $1 \leq i, j \leq n$. Bestimmen Sie $\operatorname{Rg} A$.
Hinweis: Betrachten Sie zuerst die Fälle $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$. *6 Punkte*