Nachholklausur zur Linearen Algebra I (29 3. 95)

Professor Dr. H. Pahlings, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Von den 10 gegebenen Aufgaben für insgesamt 60 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Sie brauchen 25 Punkte, um einen Übungsschein zu erhalten. Bitte beachten Sie bei der Bearbeitung der Aufgaben, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösungen bilden. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.

a) Formulieren Sie Definitionen für die Begriffe „Restklasse“, „Faktorraum“ und „Dualraum“. Zur Erinnerung: Vergessen Sie nicht, jeweils alle Voraussetzungen anzugeben und alle Bezeichnungen, die Sie benutzen (wie z. B. K oder V), zu erklären. *3 Punkte*

b) Zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume V und W (über demselben Körper K) seien durch die Basisfolgen $B = (v_1, \ldots, v_n)$ und $C = (w_1, \ldots, w_m)$ gegeben, und es sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung von V nach W. Wie ist die Abbildungsmatrix von φ bezüglich B und C definiert? *2 Punkte*

Aufgabe 2.

Es seien T_1 und T_2 zwei 2-dimensionale Teilräume eines 3-dimensionalen Vektorraums. Welche Dimension muß $T_1 \cap T_2$ mindestens haben? Begründen Sie Ihre Antwort, und geben Sie ein konkretes Beispiel für diesen Fall an. *3 Punkte*

Aufgabe 3.

Es sei K ein Körper und $V = K^{2\times 2}$ der Vektorraum der 2×2-Matrizen über K.
Ist $U = \{A \in V \mid \det A = 0\}$ ein Teilraum von V? (Antwort mit Begründung.) *4 Punkte*

Aufgabe 4.

Für welche $c \in \mathbb{Q}$ hat das Gleichungssystem $\begin{bmatrix} -1 & 0 & c-3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & c+2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ über $\mathbb{Q}$

a) keine Lösung,

b) genau eine Lösung,

c) mehr als eine Lösung? (Antwort jeweils mit Begründung.) *6 Punkte*

Aufgabe 5.

Es seien $T_1 = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$ und $T_2 = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle$ zwei Teilräume des Vektorraums $V = \mathbb{Z}_2^{4\times 1}$. Berechnen Sie eine Basis für $T_1 \cap T_2$. *5 Punkte*

Aufgabe 6.

Gegeben seien ein 2-dimensionaler Vektorraum V über einem Körper K, eine Basis B von V sowie die zwei Matrizen $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ und $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ aus $K^{2\times 2}$. Dann gibt es eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ sowie eine Bilinearform $\Phi\colon V \times V \to K$ mit ${}_B[\varphi]_B = [\Phi]_B = A_1$.

a) Gibt es eine Basis C von V mit ${}_C[\varphi]_C = A_2$? (Antwort mit Begründung.) *4 Punkte*

b) Gibt es eine Basis D von V mit $[\Phi]_D = A_2$? (Antwort mit Begründung.) *3 Punkte*

Aufgabe 7.
Im Vektorraum Abb ($\mathbb{R}, \mathbb{R}$) betrachten wir den Teilraum V, der von den durch

$$f_1(x) = \sin^2 x, \quad f_2(x) = \cos^2 x \text{ und } f_3(x) = \sin x \cos x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

definierten Abbildungen f_1, f_2, f_3 erzeugt wird. Dann ist die Menge $B = \{f_1, f_2, f_3\}$ eine Basis von V. (Das brauchen Sie nicht zu zeigen.) Ferner sei $\varphi\colon V \to V$ die durch

$$\varphi(f)(x) = f'(x) + f''(x) \text{ für alle } f \in V \text{ und } x \in \mathbb{R}$$

definierte Abbildung von V nach V, wobei f' und f'' die gewöhnliche erste und zweite Ableitung von f nach x bezeichnen. Bekanntlich ist φ linear.

a) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix ${}_B[\varphi]_B$. *5 Punkte*

b) Berechnen Sie eine Basis von Kern φ. (Vergessen Sie dabei nicht, daß die Vektoren von V Funktionen und keine Spalten sind.) *3 Punkte*

Aufgabe 8.
Es sei K ein Körper, n eine natürliche Zahl, $A \in K^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix und $B \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie: Jeder Eigenwert von AB ist auch ein Eigenwert von BA. *4 Punkte*

Aufgabe 9.
Es sei $V = P_3(\mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad ≤ 3 auf $\mathbb{R}$, $B = (f_1, f_2, f_3)$ eine Basisfolge von V und φ die durch die Matrix ${}_B[\varphi]_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ definierte lineare Abbildung von V in V.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von φ und ihre algebraischen Vielfachheiten. *3 Punkte*

b) Berechnen Sie für jeden Eigenwert von φ eine Basis des zugehörigen Eigenraums. (Vergessen Sie dabei nicht, daß die Vektoren in V Polynomfunktionen und keine Spalten sind.) *5 Punkte*

c) Berechnen Sie das Minimalpolynom von φ. *3 Punkte*

Aufgabe 10.
Es sei wieder $V = P_3(\mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad ≤ 3 auf $\mathbb{R}$ und $B = (f_1, f_2, f_3)$ eine Basisfolge von V, und es sei Φ die durch die Matrix

$$[\Phi]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

definierte Bilinearform Φ auf V. Berechnen Sie eine Orthogonalbasis $C = (g_1, g_2, g_3)$ von V bezüglich Φ, und geben Sie die Matrix $[\Phi]_C$, die Basiswechselmatrix ${}_B[id]_C$ sowie die Basisvektoren g_1, g_2, g_3 (als Ausdrücke in f_1, f_2, f_3) an. *7 Punkte*

Hinweis: Wir empfehlen, die Methode der simultanen Zeilen- und Spaltenumformungen zu benutzen.