

Ankreuzteil

20.9.2000

Aufgabe 1.Sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum, $v_1, \dots, v_n \in V$ und $1 \leq i, j \leq n$.

Sind folgende Aussagen richtig?

- Ist (v_1, \dots, v_n) linear unabhängig, so ist $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$ Ja Nein
- Ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ linear unabhängig, so ist $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$ Ja Nein
- Ist (v_1, v_2) linear abhängig, so gibt es $s \in K$ mit $v_2 = s \cdot v_1$ Ja Nein
- Sind (v_1, v_2) , (v_2, v_3) und (v_1, v_3) linear unabhängig, so ist
 (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig Ja Nein
- (v_1, v_2) ist linear unabhängig genau dann, wenn $(v_1 + v_2, v_2)$
linear unabhängig ist Ja Nein

Aufgabe 2.Ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten über dem Körper \mathbb{F}_2

- ist nicht eindeutig lösbar, wenn $m > n$ ist Ja Nein
- kann genau 6 Lösungen haben, wenn $m < n$ ist Ja Nein
- ist stets lösbar, wenn $m < n$ ist Ja Nein
- hat immer eine nicht-triviale Lösung, wenn es homogen ist Ja Nein
- kann genau 4 Lösungen haben, wenn $m = n - 1$ ist Ja Nein

Aufgabe 3.Sei $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ und $\varphi_1 : V \rightarrow V$ definiert durch $\varphi_1(f)(x) = f(x + 1)$, $\varphi_2 : V \rightarrow V$ durch $\varphi_2(f)(x) = f(x) + 1$ und $\varphi_3 : V \rightarrow V$ durch $\varphi_3(f)(x) = f(x^2)$ für $f \in V$ und $x \in \mathbb{R}$.

- φ_1 ist injektiv Ja Nein
- φ_1 ist linear Ja Nein
- φ_2 ist linear Ja Nein
- φ_2 ist surjektiv Ja Nein
- φ_3 ist linear Ja Nein

Aufgabe 4.Es sei (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis des \mathbb{R}^3 . Es gibt eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

- $\varphi(e_1) = \varphi(e_2) = \varphi(e_1 + e_2) = e_3$ Ja Nein
- $\varphi(e_1) = \varphi(e_3) = \varphi(e_1 + e_2) = e_3$ Ja Nein
- $\text{Kern}(\varphi) = \text{Bild}(\varphi)$ Ja Nein
- $\text{Kern}(\varphi) \geq \text{Bild}(\varphi)$ Ja Nein
- $\varphi(e_1 + e_2) = \varphi(e_2 + e_3) = \varphi(e_1 + e_3) = e_3$ Ja Nein

Aufgabe 5.Es sei $V = K^{2 \times 2}$ mit einem beliebigen Körper K . Welche der folgenden Mengen sind Teilräume von V ?

- $\{A \in V \mid \text{Spur } A = 0\}$ Ja Nein
- $\{A \in V \mid \text{Rg } A = 1\}$ Ja Nein
- $\left\{A \in V \mid A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ Ja Nein
- $\{A \in V \mid A^2 = 0\}$ Ja Nein
- $\{A \in V \mid A = A^T\}$ Ja Nein

Aufgabe 6.

Für jeden Körper K , jedes $n \in \mathbb{N}$, alle $A, B \in K^{n \times n}$ und alle $s \in K$ gilt:

- det($A + B$) = det A + det B Ja Nein
- det(sA) = s det A Ja Nein
- det(AB) = det(BA) Ja Nein
- det A = det $B \implies$ det($A - B$) = 0 Ja Nein
- Ist $A^2 = E_n$, so ist det $A = 1$ Ja Nein

Aufgabe 7.

Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sei $\chi = \chi_A = \det(X \cdot E_n - A)$ das charakteristische Polynom und $\mu = \mu_A$ das Minimalpolynom von A . Dann gilt für jedes solche A :

- Ist $f \in \mathbb{C}[X]$ mit $f(A) = 0$, so ist $\chi \mid f$ Ja Nein
- Ist $f \in \mathbb{C}[X]$ mit $\chi \mid f$, so ist $f(A) = 0$ Ja Nein
- Ist $A^n = 0$, so ist $\chi = X^n$ Ja Nein
- Ist $A^n = 0$, so ist $\mu = X^n$ Ja Nein
- Ist $\mu = X^n - 3$, so ist $\chi = X^n - 3$ Ja Nein

Aufgabe 8.

Für alle Vektorräume V und alle $\varphi \in \text{End } V$ gilt:

- Hat φ den Eigenwert 1, so ist φ invertierbar Ja Nein
- Hat φ den Eigenwert 0, so ist φ nicht invertierbar Ja Nein
- Hat φ den Eigenwert 1, so hat $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ ebenfalls den Eigenwert 1 Ja Nein
- Hat φ^2 den Eigenwert 0, so hat φ ebenfalls den Eigenwert 0..... Ja Nein
- Ist $\varphi^2 = \text{id}_V$ und t Eigenwert von φ , so ist $t \in \{1, -1\}$ Ja Nein

Aufgabe 9. Sei $2 < n \in \mathbb{N}$ und $A = [a_{ij}] \in \mathbb{Q}^{2n \times 2n}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \equiv j \pmod{2} \text{ (d.h. } i - j \text{ ist gerade)} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Dann gilt:

- Rg $A = n$ Ja Nein
- Rg $A = 2$ Ja Nein
- det $A = 1$ Ja Nein
- A ist diagonalisierbar Ja Nein
- Das Minimalpolynom ist $X^3 - n^2X$ Ja Nein

Aufgabe 10. Es seien K ein Körper und $A, B \in K^{n \times n}$.

- Ist A kongruent zu einer Diagonalmatrix, dann ist A symmetrisch .. Ja Nein
- Jede symmetrische Matrix ist kongruent zu einer Diagonalmatrix ... Ja Nein
- Sind A und B kongruent, so sind sie ähnlich Ja Nein
- Sind A und B kongruent, so haben sie die gleiche Determinante Ja Nein
- Sind A und B ähnlich, so haben sie die gleiche Spur Ja Nein

Aufgaben mit Begründung

Aufgabe 11.

Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem über \mathbb{R}

$$\begin{aligned} tx_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + tx_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

- (a) lösbar ist,
 (b) eindeutig lösbar ist.
 (c) Zu jedem t gebe man die Dimension des Lösungsraums des zugehörigen homogenen Systems an. (6 Punkte)

Aufgabe 12.

Es sei K ein Körper, $V = K^{2 \times 2}$,

$$\begin{aligned} \varphi : V &\rightarrow V \\ A &\mapsto A^T + A \end{aligned}$$

und $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$. Hierbei ist E_{ij} die Matrix, die an der Stelle (i, j) eine Eins und sonst lauter Nullen hat, und A^T ist die transponierte Matrix zu A .

- (a) Zeigen Sie, dass φ linear ist.
 (b) Berechnen Sie $_{\mathcal{B}}[\varphi]_{\mathcal{B}}$.
 (c) Geben Sie je eine Basis von Bild φ und von Kern φ an.
 (d) Welche Bedingung muss K erfüllen, damit $V = \text{Bild } \varphi + \text{Kern } \varphi$ ist? (6 Punkte)

Aufgabe 13.

Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $A_n = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei

$$a_{ij} = \begin{cases} i + 1 & \text{für } i = j \\ j & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

ist. Alle Umformungen sind zu erklären. (6 Punkte)

Aufgabe 14.

Es sei $V = \mathbb{F}_2^{4 \times 1}$ und

$$\varphi : V \rightarrow V \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_2^{4 \times 4}$$

- (a) Berechnen Sie das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom von φ .
 (b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von φ .
 (c) Geben Sie zu jedem Eigenraum eine Basis an.
 (d) Berechnen Sie die Jordansche Normalform von φ . (7 Punkte)