Ankreuzteil

Aufgabe 1.
Es sei K ein Körper und $V = K^{2\times 2}$ der K-Vektorraum der 2×2-Matrizen. Welche der folgenden Teilmengen sind Teilräume (d.h. Untervektorräume)?

$\{A \in V \mid \det A = 0\}$ ☐ Ja ☐ Nein
$\{A \in V \mid A^2 = E_2\}$ (E_2 ist die Einheitsmatrix) ☐ Ja ☐ Nein
$\{A \in V \mid A + A^T = \underline{0}\}$ ($\underline{0}$ ist die Nullmatrix) ☐ Ja ☐ Nein
$\{A \in V \mid A + sE_2 = \underline{0}$ für ein $s \in K\}$ ☐ Ja ☐ Nein
$\left\{A \in V \,\middle|\, A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \underline{0}\right\}$ ☐ Ja ☐ Nein
$\{A \in V \mid \operatorname{Spur} A = 0\}$ ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 2.
Welche der folgenden Abbildungen sind $\mathbb{R}$-linear?

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 + 1$ ☐ Ja ☐ Nein
$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$ ☐ Ja ☐ Nein
$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, 2x)$ ☐ Ja ☐ Nein
$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (x - 1, x + 1)$ ☐ Ja ☐ Nein
$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (2x, 0)$ ☐ Ja ☐ Nein
$\varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}, A \mapsto \det A$ ☐ Ja ☐ Nein

---

Aufgabe 3.
Es sei K ein Körper, $A \in K^{m\times n}$ und $\underline{0} \neq b \in K^{m\times 1}$, wobei $\underline{0}$ der Nullvektor ist.
Weiter seien $L = \{x \in K^{n\times 1} \mid Ax = b\}$ und $L_0 = \{x \in K^{n\times 1} \mid Ax = \underline{0}\}$.
Welche der folgenden Aussagen sind richtig? (Teilraum heißt Untervektorraum)

L ist Teilraum von $K^{n\times 1}$ der Dimension $n - \operatorname{Rg} A$ ☐ Ja ☐ Nein
L_0 ist Teilraum von $K^{n\times 1}$ der Dimension $n - \operatorname{Rg} A$ ☐ Ja ☐ Nein
$L \neq \emptyset$ genau dann, wenn $\operatorname{Rg} A = m$ ist ☐ Ja ☐ Nein
Ist $v \in L$, so ist $L = \{v + w \mid w \in L_0\}$ ☐ Ja ☐ Nein
$|L| = 1$ genau dann, wenn $\operatorname{Rg} A = m$ ist ☐ Ja ☐ Nein
$|L_0| = 1 \quad\Longrightarrow\quad |L| = 1$ ☐ Ja ☐ Nein
Ist $m < n$, so ist $L \neq \emptyset$ ☐ Ja ☐ Nein
Ist $m > n$, so ist $L = \emptyset$ ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 4.
Sei K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$. Dann ist $(v_1, \dots, v_n)$ **linear abhängig** genau dann, wenn

es $s_1, \dots, s_n \in K$ gibt mit $\sum_{i=1}^n s_i v_i = \underline{0}$ ☐ Ja ☐ Nein
für alle $s_1, \dots, s_n \in K$ gilt $\sum_{i=1}^n s_i v_i = \underline{0}$ ☐ Ja ☐ Nein
aus $\sum_{i=1}^n s_i v_i = \underline{0}$ mit $s_i \in K$ folgt $s_1 = \cdots = s_n = 0$ ☐ Ja ☐ Nein
für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\rangle$ ☐ Ja ☐ Nein
es $i \in \{1, \dots, n\}$ gibt mit $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\rangle$ ☐ Ja ☐ Nein
es ein $v \in V$ gibt mit $v \notin \langle v_1, \dots, v_n\rangle$ ☐ Ja ☐ Nein

---

Aufgabe 5.

Es sei V ein 2-dimensionaler $\mathbb{F}_2$-Vektorraum. Tragen Sie die richtigen **Zahlen** ein.
Die Anzahl

der Vektoren von V ist .... ☐

der 1-dimensionalen Teilräume von V ist .... ☐

der Basisfolgen von V ist .... ☐

der Basen (d.h. Basismengen) ist .... ☐

der linearen Abbildungen $\varphi : V \to V$ ist .... ☐

der injektiven linearen Abbildungen $\varphi : V \to V$ ist .... ☐

der bijektiven linearen Abbildungen $\varphi : V \to V$ ist .... ☐

der linearen Abbildungen (d.h. Linearformen) $\varphi : V \to \mathbb{F}_2$ ist .... ☐

der injektiven linearen Abbildungen $\varphi : V \to \mathbb{F}_2$ ist .... ☐

der surjektiven linearen Abbildungen $\varphi : V \to \mathbb{F}_2$ ist .... ☐

Aufgabe 6.

Es seien V und W Vektorräume über $\mathbb{Q}$ mit $\dim V = 3$, $\dim W = 2$, $\varphi : V \to W$ ein Epimorphismus (d.h. surjektive, lineare Abbildung) und $\psi : W \to V$ ein Monomorphismus (d.h. injektive, lineare Abbildung). Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

Für beliebige Basen B und B' von V bzw. W ist ${}_{B'}[\varphi]_B \in \mathbb{Q}^{2\times 3}$ ..... ☐ Ja ☐ Nein

Für beliebige Basen B und B' von V bzw. W ist $\operatorname{Rg}({}_B[\psi]_{B'}) = 2$ ... ☐ Ja ☐ Nein

Es gibt Basen B und B' von V bzw. W mit ${}_{B'}[\varphi]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ .. ☐ Ja ☐ Nein

Es gibt Basen B und B' von V bzw. W mit ${}_{B'}[\varphi]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .. ☐ Ja ☐ Nein

Für jede Basis B von V ist ${}_B[\psi \circ \varphi]_B \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ .... ☐ Ja ☐ Nein

Für jede Basis B von V ist $\det({}_B[\psi \circ \varphi]_B) = 0$ .... ☐ Ja ☐ Nein

---

Aufgabe 7.

Es sei K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi \in \operatorname{End} V$. Weiter sei $\mu \in K[X]$ das Minimalpolynom und $\chi \in K[X]$ das charakteristische Polynom von φ. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

Es ist stets $\operatorname{Grad} \mu < n$ .... ☐ Ja ☐ Nein

Es ist stets $\operatorname{Grad} \chi = n$ .... ☐ Ja ☐ Nein

Ist φ injektiv, so ist 0 kein Eigenwert von φ .... ☐ Ja ☐ Nein

Genau dann ist $t \in K$ Eigenwert von φ, wenn $\mu(t) = 0$ ist .... ☐ Ja ☐ Nein

Ist $\mu = \chi$, so ist φ diagonalisierbar .... ☐ Ja ☐ Nein

Ist $\varphi^{2n} = 0$, so ist $\varphi^n = 0$ .... ☐ Ja ☐ Nein

Ist $\mu = X - 1$, so ist $\varphi = \mathrm{id}_V$ .... ☐ Ja ☐ Nein

Ist $\chi = (X-1)^n$, so ist $\varphi = \mathrm{id}_V$ .... ☐ Ja ☐ Nein

---

Aufgaben mit Begründung

Aufgabe 8.

(a) Gibt es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 1}$ mit

$$\operatorname{Kern}\varphi = \left\{ \begin{bmatrix} x & x \\ y & y \end{bmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad \operatorname{Bild}\varphi = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}?$$

(2 Punkte)

(b) Gibt es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$\operatorname{Kern}\varphi = \left\{ \begin{bmatrix} x & x \\ y & y \end{bmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad \operatorname{Bild}\varphi = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{bmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\}?$$

(4 Punkte)

Geben Sie jeweils eine solche Abbildung explizit an oder beweisen Sie, dass es keine gibt.

Aufgabe 9.

Es seien $n \geq 2$ und $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq n$ mit:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j = 1 \\ 2 & \text{für } i = j > 1 \\ 1 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad \text{und} \quad b_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{für } i = j \\ 1 & \text{für } i \neq j \end{cases} .$$

Man berechne

(a) $\det[a_{i,j}]$, *(3 Punkte)*

(b) $\det[b_{i,j}]$. *(3 Punkte)*

Aufgabe 10.

Es sei $V = P_2(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynomfunktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad kleiner oder gleich 2 und $\varphi : V \to V$ sei definiert durch $\varphi(f)(x) = f'(x) + f(x-1)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $f \in V$. Dabei steht f' für die Ableitung von f.

(a) Man zeige: φ ist linear. *(1 Punkt)*

(b) Man berechne $A = {}_B[\varphi]_B$ für die Basisfolge $B = (p_0 + p_1, -p_0 + p_1, p_2)$; dabei ist $p_i \in V$ definiert durch $p_i(x) = x^i$ und $p_0(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R}$ und $i = 1, 2$.
(Es braucht nicht bewiesen zu werden, dass B eine Basis ist.) *(2 Punkte)*

(c) Man berechne die Eigenwerte von φ und gebe zu jedem Eigenwert eine Basis des zugehörigen Eigenraums an. *(2 Punkte)*

(d) Ist φ diagonalisierbar? *(1 Punkt)*

(e) Was ist die Jordansche Normalform von φ? *(1 Punkt)*

Aufgabe 11.
Es sei Φ eine Bilinearform auf $V = \mathbb{R}^{3\times 1}$ mit Gram-Matrix

$$[\Phi]_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

wobei S die Standardbasis von V ist.

(a) Ist Φ nicht ausgeartet? Ist Φ positiv definit? *(2 Punkte)*

(b) Berechnen Sie eine Orthogonalbasis B von V bezüglich Φ und berechnen Sie $[\Phi]_B$. *(4 Punkte)*