2. Ersatzhalbklausur zur Linearen Algebra I (11. 4. 97)

Professor Dr. J. Neubüser, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Von den 6 gegebenen Aufgaben für insgesamt 45 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.

(a) Gibt es (über einem geeigneten Körper) ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 4 Unbekannten, das genau 16 Lösungen hat?

(b) Gibt es (über einem geeigneten Körper) ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 5 Unbekannten, das genau 32 Lösungen hat?

(Antwort jeweils mit konkretem Beispiel und Beweis oder mit Gegenbeweis.
Ausführliche und vollständige Argumentation ist wichtig.) *3 + 3 = 6 Punkte*

Aufgabe 2.

Es sei π die durch

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$i\pi$	9	5	1	7	12	6	10	11	3	2	8	4

gegebene Permutation aus S_{12}, und es sei $\rho = (1, 11, 4, 8)(2, 9, 3)(5, 12, 7, 10, 6) \in S_{12}$.

(a) Schreiben Sie π und π^{-1} jeweils als Produkt ziffernfremder Zykel.

(b) Berechnen Sie die Permutationen $\pi{\cdot}\rho$ und $\rho{\cdot}\pi$ (in Zykelschreibweise).

(c) Schreiben Sie π als Produkt von Transpositionen.

(d) Kann man ρ als Produkt von Dreierzykeln schreiben? (Antwort mit Begründung.)

(e) Berechnen Sie die Ordnung von π. *1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 6 Punkte*

Aufgabe 3.

Es sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und φ der durch ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definierte Endomorphismus von $\mathbb{R}^3$.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von φ und ihre Vielfachheiten.

(b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert von φ den zugehörigen Eigenraum.

(c) Berechnen Sie eine Fächerbasis C von $\mathbb{R}^3$ bezüglich φ sowie die zugehörige Abbildungsmatrix ${}_{C}\varphi_{C}$. *3 + 1 + 5 = 9 Punkte*

Aufgabe 4.
Gilt für alle Paare (φ, ψ) von linearen Abbildungen φ und ψ von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$, daß

(a) Φ_1 mit $\Phi_1(X,Y) = \varphi(X) + \psi(Y)$ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$ ist,

(b) Φ_2 mit $\Phi_2(X,Y) = \varphi(X) \cdot \psi(Y)$ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$ ist?

(Antwort jeweils mit Beweis oder konkretem Gegenbeispiel.
Quantoren nicht vergessen!) *3 + 3 = 6 Punkte*

Aufgabe 5.
Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 und $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2)$ eine Basis von V. Ein Skalarprodukt Φ auf V sei durch die Matrix ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ gegeben.

(a) Berechnen Sie das Radikal von V bezüglich Φ. (Wichtig ist eine ausreichende Begründung und Erläuterung Ihrer Rechnung. Formulieren Sie das Ergebnis in einem Schlußsatz.)

(b) Ist Φ ausgeartet? (Antwort mit Begründung.) *5 + 1 = 6 Punkte*

Aufgabe 6.
Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ eine Basis von V. Ein Skalarprodukt Φ auf V sei durch die Matrix ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ gegeben.

(a) Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthogonalbasis $\mathcal{C} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ von V bezüglich Φ, und geben Sie die Basiswechselmatrix ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{C}}$ sowie die Matrix ${}_{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}}$ an.
(Es geht in dieser Aufgabe um das Gram-Schmidt-Verfahren. Die Benutzung anderer Verfahren wird nicht gewertet.)

(b) Ist Φ positiv definit? (Antwort mit Begründung.)

(c) Bestimmen Sie Index und Signatur von Φ. (Mit Erläuterung.)

(d) Durch die Basiswechselmatrix ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ sei eine weitere Basis $\mathcal{A}$ von V gegeben. Berechnen Sie die Matrix ${}_{\mathcal{A}}\Phi_{\mathcal{A}}$ von Φ bezüglich $\mathcal{A}$. *7 + 1 + 2 + 2 = 12 Punkte*
