2. Klausur zur Linearen Algebra I (WS 92/93)

Lesezeit: 15 Minuten | Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur `eine` Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen `wesentlichen` Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Es sei $\mathbb{F}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ der Köper mit drei Elementen. Man bestimme alle Lösungen des folgenden inhomogenen Gleichungssystems über dem Köper $\mathbb{F}_3$. *5 Punkte*

$$\begin{array}{rrrrrcl}
\overline{1}x_1+ & \overline{2}x_2+ & \overline{0}x_3+ & \overline{1}x_4+ & \overline{2}x_5 & = & \overline{2} \\
\overline{2}x_1+ & \overline{2}x_2+ & \overline{1}x_3+ & \overline{0}x_4+ & \overline{1}x_5 & = & \overline{1} \\
\overline{1}x_1+ & \overline{1}x_2+ & \overline{0}x_3+ & \overline{1}x_4+ & \overline{1}x_5 & = & \overline{2} \\
\overline{1}x_1+ & \overline{2}x_2+ & \overline{2}x_3+ & \overline{1}x_4+ & \overline{0}x_5 & = & \overline{0}
\end{array}$$

Aufgabe 2.
Es seien $U_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle$ und $U_2 = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle$ Teilräume des $\mathbb{Q}^3$. Man bestimme <u>Basen</u> für $\langle U_1, U_2 \rangle$ und $U_1 \cap U_2$. *5 Punkte*

Aufgabe 3.

1. Man berechne die Determinante der Matrix $M = \begin{pmatrix} x & -1 & 3 \\ 2x-1 & -3 & x-7 \\ 0 & 1 & x+4 \end{pmatrix}$. *2 Punkte*
2. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist M invertierbar? *1 Punkt*
3. Für welche $x \in \mathbb{R}$ hat M die Determinante 1? *1 Punkt*
4. Für diesen Fall (Determinante 1) berechne man die inverse Matrix. *3 Punkte*

Aufgabe 4.
Es sei $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix über dem Ring der ganzen Zahlen mit Determinate -1. Man beweise oder widerlege: A ist invertierbar, und $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$. *3 Punkte*

Aufgabe 5.
Es sei $V = \mathbb{R}^3$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.
Welche der folgenden Abbildungen von $V \times V$ nach $\mathbb{R}$ sind Bilinearformen? (Falls ja, genügt ein kurzer Hinweis warum.)

1. $\Phi(X, Y) = x_1 y_2 + x_1 y_3 + y_3$, *1 Punkt*
2. $\Phi(X, Y) = (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2)$, *1 Punkt*
3. $\Phi(X, Y) = x_1 x_2 - y_2 y_3$. *1 Punkt*

Aufgabe 6.
Es seien K ein Körper, $A \in K^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix und $B \in K^{n \times n}$. Es sei weiter $V = K^n$ und X ein Eigenvektor bezüglich AB. Man bestimme einen Eigenvektor bezüglich BA. *4 Punkte*

Aufgabe 7.
Es sei π die durch

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$i\pi$	2	1	4	5	3	7	8	9	10	6

gegebene Permutatione auf 10 Ziffern.

1. Man schreibe π als Produkt ziffernfremder Zykel. *1 Punkt*
2. Man zeige, daß π ungerade ist. *1 Punkt*
3. Man bestimme die Ordnung von π. *1 Punkt*
4. Man zeige, daß man π nicht als Produkt von Fünferzykeln schreiben kann. *2 Punkte*

Aufgabe 8.
Es sei die invertierbare Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ gegeben.
Bestimmen Sie ein Polynom f vom Grade 2, für das $A^{-1} = f(A)$ gilt. *5 Punkte*
HINWEIS: Verwenden Sie den Satz von Cayley-Hamilton.

Aufgabe 9.
Es sei $V = \mathbb{Q}^4$ und B die Standardbasis von V. Eine lineare Abbildung φ von V nach V sei durch ${}_B\varphi_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ gegeben. Man bestimme eine Fächerbasis für V bezüglich φ. *8 Punkte*
HINWEIS: Man kann das charakteristische Polynom von φ an der Matrix ${}_B\varphi_B$ ablesen.

Aufgabe 10.
Es sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, V^{**} der Bidualraum von V und

$$T : V \to V^{**},\ X \mapsto X^{**} \ \text{ mit } \ X^{**}(\varphi) = \varphi(X)$$

der aus der Vorlesung bekannte Isomorphismus von V auf V^{**}. Man zeige, daß für jeden Teilraum $U \leq V$

$$X^{**} \in \mathrm{An}(\mathrm{An}(U)) \iff X \in \bigcap_{\varphi \in \mathrm{An}(U)} \mathrm{Kern}(\varphi)$$

gilt. *5 Punkte*

Aufgabe 11.
Es sei $\alpha = \sqrt{2}/2$. Man zeige, daß *6 Punkte*

2^{1-n} die Determinante der $n \times n$-Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -\frac{1}{2} & 0 \\ \vdots & \ddots & -\frac{1}{2} & 1 & -\alpha \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$ ist.
